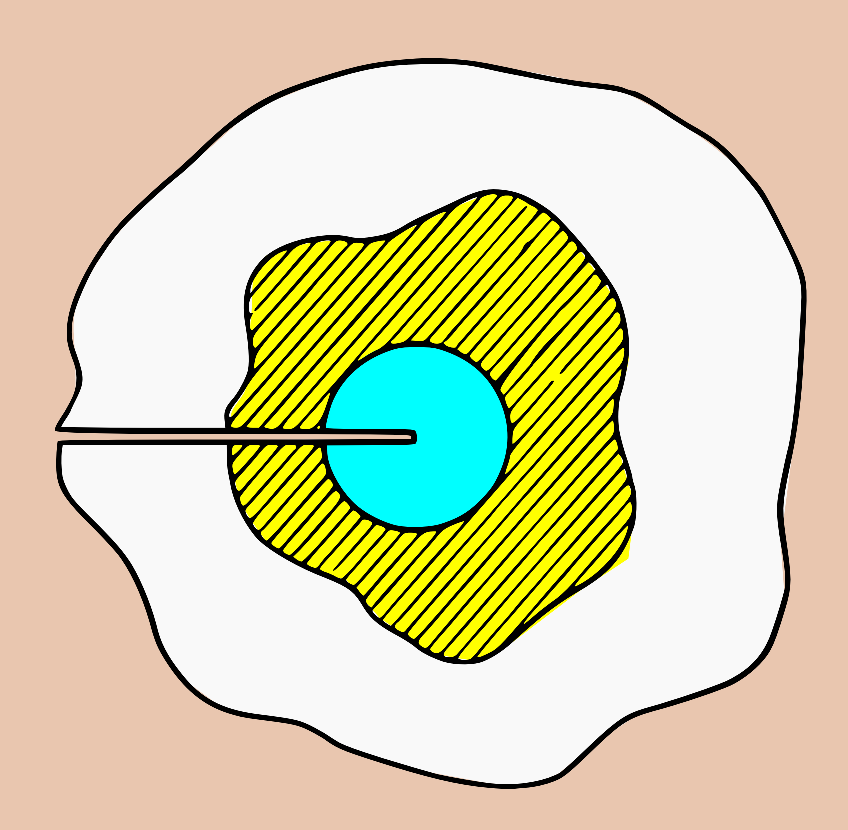
V. Parton, P. Perline

# ÉQUATIONS INTÉGRALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ



Éditions Mir Moscou

В. З. ПАРТОН, П. И. ПЕРЛИН

# ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

V. PARTON, P. PERLINE

# ÉQUATIONS INTÉGRALES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

ÉDITIONS MIR · MOSCOU

Traduit du russe par
CHRISTIANNE DER-MEGREDITCHIAN

*На французском языке*

## TABLE DES MATIÈRES

## AVANT-PROPOS À L'ÉDITION FRANÇAISE

La théorie des équations intégrales de Fredholm, incontestablement l'une des plus grandes réalisations de l'analyse mathématique, a pris corps vers le début du XXe siècle. Elle a exercé une influence déterminante sur l'évolution de différentes branches de la physique mathématique et, en particulier, sur celle de la théorie des problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles. Les équations de Fredholm ont notamment permis, à elles seules, une analyse exhaustive du problème de Dirichlet et du problème de Neumann pour les fonctions harmoniques.

Des résultats du plus haut intérêt ont été obtenus dans l'application des équations de Fredholm à l'étude des problèmes plans de l'élasticité. L'apport de N. Muskhelishvili et D. Sherman y est prépondérant. La théorie des équations intégrales singulières multidimensionnelles, qui est une généralisation naturelle de la théorie des équations de Fredholm, a grandement contribué au succès des travaux consacrés à l'étude des problèmes tridimensionnels de l'élasticité. L'appareil de la théorie des intégrales et des équations intégrales singulières multidimensionnelles a été essentiellement élaboré par F. Tricomi, J. Jiro, S. Mikhline, V. Kupradze.

Grâce au développement du calcul électronique, les équations intégrales sont de plus en plus largement utilisées par les ingénieurs pour les calculs de résistance. Vu l'importance que revêtent les équations intégrales, les auteurs ont entrepris une tentative de présenter dans un livre une étude qui se veut complète sur la théorie des équations intégrales, aussi bien régulières que singulières, et leurs applications aux problèmes de la théorie de l'élasticité. Sont également traités les différents aspects des algorithmes de calcul, y compris les questions de leur justification.

La faveur qu'a trouvée cet ouvrage (Moscou, « Naouka », 1977) auprès des spécialistes soviétiques laisse aux auteurs tout lieu d'espérer qu'il sera profitable aux lecteurs francophones.

En 1982, les Editions Mir font paraître la traduction anglaise de cet ouvrage. Pour la version française, des modifications ont été apportées à toute une série de paragraphes. Elle est en outre complétée par un nouveau paragraphe, § 39, où sont cités les résultats contenus dans des travaux récents portant essentiellement sur les algorithmes de calcul numérique des problèmes tridimensionnels.

Les auteurs remercient les professeurs S. Mikhline et V. Mazia pour leurs remarques et suggestions qui ont permis de nombreuses améliorations de l'ouvrage.

*V. Parton, P. Perline*

Moscou, janvier 1982

# AVANT-PROPOS À L'ÉDITION RUSSE

L'évolution rapide du calcul électronique a accru brusquement l'intérêt des chercheurs envers les méthodes numériques universelles destinées à la résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité. Outre les méthodes universellement admises en mécanique des milieux continus et dans les calculs d'ingénieurs telles que les méthodes des éléments finis et des différences finies, celle qui offre le plus de perspectives et qui a déjà fait ses preuves est la méthode du potentiel, qui ramène les problèmes aux limites à des équations intégrales correspondantes. L'avantage essentiel de cette méthode réside dans la réduction de la dimension des problèmes considérés.

Dans la présente monographie sont exposés les principes fondamentaux de la théorie des équations intégrales régulières et singulières dans le cas d'une ou de deux variables. Elle comporte une étude des questions générales de la théorie des méthodes approchées et leur application à la résolution efficace aussi bien des équations régulières que des équations singulières. Les renseignements indispensables sur les équations bi- et tridimensionnelles de l'élasticité, y compris la position des problèmes aux limites, y figurent également. On propose ensuite dans l'ouvrage l'établissement et l'étude des différentes équations intégrales du problème plan pour les principaux problèmes aux limites aussi bien que pour les problèmes mixtes et les problèmes dans lesquels interviennent des coupures dans les corps. Pour le cas tridimensionnel l'étude des équations intégrales est réalisée pour les premier et deuxième problèmes fondamentaux.

En rédigeant leur monographie, les auteurs ont consacré une attention particulière à l'exposé des méthodes efficaces de résolution des équations intégrales des problèmes plan et spatial de la théorie de l'élasticité. Elle comporte des exemples illustrant les avantages de telle ou telle approche. De nombreux travaux cités dans l'ouvrage donnent une information pratiquement exhaustive sur l'objet étudié. La table des matières permet d'obtenir un aperçu complet du contenu du livre.

L'accent mis sur les méthodes numériques de résolution des équations intégrales de l'équilibre élastique atteste la conviction profonde des auteurs selon laquelle cette approche ouvre des perspectives exceptionnelles, vu le progrès réalisé dans le développement des ordinateurs toujours plus rapides et efficaces.

Le contenu de cet ouvrage est limité aux problèmes statiques de la théorie de l'élasticité, bien que l'extension des méthodes exposées aux problèmes dynamiques ne soit évidemment liée à aucune difficulté de principe.

Le lecteur intéressé pourra trouver une étude mathématique approfondie de la théorie des équations intégrales dans les ouvrages connus de F. Gakhov, V. Kupradze, S. Mikhline et N. Muskhelishvili.

Une aide considérable a été apportée aux auteurs par S. Mikhline et D. Sherman pour la préparation de la monographie. Diverses remarques utiles ont été faites par I. Vorovitch et V. Panassyuk.

N. Andrianov et S. Stupak ont eu l'amabilité de mettre à notre disposition leurs programmes composés pour la résolution de certaines classes de problèmes. La parution de ce livre doit beaucoup à la participation et à l'aide que nous a apportée Tamara Artemievna Alikhanova.

Les auteurs profitent de l'occasion pour remercier vivement tous ces collègues.

*V. Parton, P. Perline*

Moscou, novembre 1976

# SUR L'INTRODUCTION DES MÉTHODES DES ÉQUATIONS INTÉGRALES EN THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

La technique de calcul se développe de façon intensive et sous l'influence réciproque grandissante et stimulante des méthodes universelles de résolution des problèmes de physique mathématique. Parmi celles-ci il faut indiquer en premier lieu les méthodes des éléments finis et des différences finies, très répandues dans les calculs d'ingénieurs. Toutefois l'étude de problèmes très compliqués, entre autres les problèmes fondamentaux tridimensionnels de la théorie de l'élasticité et même les problèmes bidimensionnels pour des domaines de configuration suffisamment complexe, est souvent difficile à réaliser à l'aide de ces méthodes dans leur développement actuel, surtout, si un degré de précision élevé est exigé. Par ailleurs, comment ne pas les apprécier: grâce à leur simplicité, elles sont faciles à appliquer et accessibles à un grand nombre de praticiens, et, dans la perspective d'un perfectionnement permanent des ordinateurs, ne seront qu'évoluer.

A l'heure actuelle, dans les cas difficiles, il est préférable d'utiliser d'autres méthodes parmi lesquelles on compte surtout la méthode des équations intégrales (aussi bien régulières que singulières).

Nous nous rappelons encore fort bien le temps où presque chaque auteur qui étudiait un problème non trivial, quel qu'il soit, de la théorie de l'élasticité, mettait un point d'honneur à le ramener à tout prix à une équation de Fredholm de deuxième espèce. Il considérait alors que son étude était pour le moins terminée sur le plan théorique, sans s'intéresser à la réalisation pratique de la solution. (D'aucuns pourraient bien s'en étonner aujourd'hui.)

Dans la procédure complexe, et à multiples étapes, de réduction de divers problèmes de la physique mathématique à des équations intégrales de Fredholm de deuxième espèce résolubles, l'un des points les plus importants est précisément l'élaboration des solutions (auxiliaires) dites fondamentales, i.e. la recherche d'une fonction (ou matrice) dépendant de deux points et satisfaisant, en coordonnées au moins de l'un des points, à l'équation différentielle initiale (ou au système d'équations).

L'appareil de construction de ces solutions fondamentales ne constitue un secret pour personne et s'est développé de façon satisfaisante. Toutefois, les solutions fondamentales sont parfois (surtout dans les problèmes tridimensionnels) tellement encombrantes que toute idée de les utiliser directement à bon escient disparaît d'elle

même. Il devient absolument indispensable de soumettre les solutions fondamentales à des simplifications admissibles afin d'en rendre l'utilisation plus ou moins commode. Dans ces transformations, on doit veiller à préserver l'intégrité de leur partie principale, déterminant en fait la réduction du problème examiné à une équation de Fredholm de deuxième espèce. Naturellement, la forme définitive (fortement tronquée) que revêt désormais la solution fondamentale n'aura plus cette qualité, au sens habituel du terme, mais par convention nous continuerons de la dénommer ainsi.

On passe ensuite à la phase finale, autrement dit à l'élaboration de la représentation voulue pour la fonction cherchée (fonction vecteur). Elle est mise sous la forme d'une intégrale étendue à la frontière du corps et renfermant sous le signe somme le produit de la solution fondamentale par une certaine fonction (encore inconnue), dite densité. La représentation ainsi construite est appelée *potentiel*.

On sait que les potentiels les plus simples, notamment les potentiels de couche simple et double, trouvent une application universelle dans divers problèmes, et particulièrement dans les problèmes harmoniques classiques. Ces potentiels ont déjà été soumis à une étude approfondie et scrupuleuse dans les travaux fondamentaux de A. Liapounov pour une très large classe de surfaces portant son nom.

Ayant à notre disposition l'expression correspondante du potentiel élastique et passant aux conditions aux limites du problème, nous obtenons pour déterminer la densité une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

Maintenant vient en premier plan le souci non moins important de la résolubilité de l'équation obtenue. Il n'est pas toujours possible d'y répondre immédiatement de façon catégorique; en règle générale, cela dépend des difficultés spécifiques et non négligeables. Si, contrairement aux précisions fondées sur des considérations plus ou moins rigoureuses, on découvre que l'équation intégrale qu'on étudie n'est pas résoluble, de nouvelles difficultés apparaissent que l'on élude, quand cela est possible, de différentes façons ou, plus exactement, de deux façons différentes. D'une part, on peut essayer de modifier la représentation de manière à obtenir en définitive une représentation adéquate de la solution à l'aide du potentiel total. Si, par contre, cette voie s'avère trop difficile et ne conduit pas au but, on peut essayer de modifier l'équation même, en introduisant les opérateurs les plus élémentaires possibles, dépendant de la densité cherchée; ceux-ci doivent être choisis de façon à éliminer de l'équation intégrale les fonctions propres sans changer l'essentiel. Parfois le chercheur est obligé d'avoir recours aux deux procédés. C'est précisément en agissant de la sorte que l'on aboutit à un résultat positif dans l'examen du premier problème fondamental tridimensionnel de la théorie de l'élasticité.

Certes, ce genre de modernisation de l'équation intégrale n'est pas simple du tout ; il oblige souvent à méditer et à réitérer les essais, ce qui est parfois non moins compliqué que la reconstruction de la solution fondamentale; en général, en dépit de toute l'expérience acquise dans les recherches de ce genre, ni l'une, ni l'autre ne peuvent être réalisées sans de grands efforts, qui, souvent, hélas, s'avèrent malgré tout infructueux.

Attardons-nous quelque peu sur l'état actuel de la théorie des équations intégrales appliquées aux principaux problèmes spatiaux de l'équilibre élastique, thème très actuel pour les applications, qui est étudié de façon suffisamment détaillée dans l'ouvrage.

Peu après que I. Fredholm eut fondé la théorie des équations intégrales de deuxième espèce qui porte son nom, et qu'on eut appliqué avec succès ces équations à l'étude des problèmes aux limites de Dirichlet et Neumann *), de nombreuses tentatives pour réaliser une analyse analogue des problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité virent le jour. G. Lauricella a réussi à résoudre le premier problème fondamental tridimensionnel (en cas de déplacements donnés), en 1907, en choisissant une solution fondamentale appropriée. Au premier abord ce choix peut paraître assez artificiel, en réalité il s'avère plus ou moins légitime et fondé sur des considérations fort compréhensibles. Comme l'a démontré Lauricella lui-même, ces équations sont toujours résolubles pour tout corps fini, limité par une seule surface. Si l'on soumet ces équations à la modification simple dont on a parlé plus haut, elles deviennent résolubles aussi bien pour un corps fini que pour un corps infini et en présence de plusieurs surfaces frontières.

Malheureusement, les choses se compliquent lorsqu'il s'agit d'élaborer les équations intégrales régulières d'un problème tridimensionnel dans lequel on donne des contraintes extérieures. En 1915, H. Weyl a construit pour ce problème des équations de Fredholm relativement simples qu'on peut appliquer à un domaine fini, limité par une surface fermée convexe. Cependant, et aujourd'hui encore, ces équations ne sont pas schématisées au point de permettre de leur appliquer, sans certaines précautions, les algorithmes de calcul connus. Ensuite le même auteur a montré comment modifier les équations obtenues afin de les rendre en principe applicables à tout domaine tridimensionnel. Hélas, ce procédé n'est pas simple, il fait appel au tenseur de Green et conduit à des équations volumineuses qui se prêtent mal tant à une étude directe qu'à une utilisation judicieuse.

Il fut un temps où beaucoup croyaient, du moins au premier abord, que l'on pouvait ramener les problèmes aux limites de la théorie de

*) Remarquons que dans le cas le plus général, où les corps sont limités par plusieurs surfaces de Liapounov, une étude minutieuse et profonde a été réalisée dans les travaux de N. Gunter.

l'élasticité à des équations intégrales régulières par des procédés plus concrets et plus simples, en prenant comme solutions fondamentales des représentations très élémentaires. La plupart du temps on essayait d'adopter comme telles les solutions du problème spatial dans lequel le corps était sollicité par une force et un moment concentrés. Cependant nombreux furent ceux qui, partant de ces solutions auxiliaires, se trouvèrent vite désappointés, car les équations obtenues par ce procédé n'étaient pas régulières et n'appartenaient pas à la classe des équations de Fredholm. Habituellement cette circonstance effrayait la plupart des initiateurs qui faisaient rapidement marche arrière. Maintenant, bien qu'avec un considérable retard, il faut avouer qu'à la grande satisfaction de tous, il y a eu quand même des chercheurs plus perspicaces, qui n'ont pas eu peur des difficultés imprévisibles, ni des perspectives obscures, et ont consacré beaucoup de temps à l'étude approfondie des équations de ce type. Cela a permis en définitive la création d'une théorie rigoureuse des équations intégrales singulières à une ou plusieurs dimensions, qui aujourd'hui est universellement adoptée et s'est cristallisée sous forme d'une branche indépendante de la théorie générale des équations intégrales. Des équations de ce genre ont été établies et scrupuleusement étudiées pour les problèmes fondamentaux de la théorie de l'élasticité. Le fait d'avoir établi de façon rigoureuse la possibilité d'appliquer à ces équations les alternatives de Fredholm a sensiblement favorisé la compréhension profonde de leur structure ainsi que l'établissement de leurs diverses propriétés spectrales. Après cela la possibilité d'une utilisation pratique de ces équations devint évidente.

Il convient de noter que les équations singulières en tant que telles ont attiré, depuis longtemps déjà, l'attention de mathématiciens brillants tels que H. Poincaré et D. Hilbert qui s'intéressaient principalement au cas d'un noyau de forme cotangente. Plus tard F. Nœther a élaboré la théorie générale de ces équations.

L'excellent travail de T. Carleman (1922) joue un rôle capital dans le développement de la théorie des équations singulières à noyau de Cauchy. Cette théorie connut une grande popularité aux yeux des théoriciens et fut admise dans un large cercle de chercheurs appliqués. Son auteur donna pour la première fois, sous une forme compacte avec une simplicité et une élégance étonnante, la solution d'un type important d'équations intégrales singulières. Cela ouvrit la voie à une étude efficace d'un grand nombre de problèmes mixtes de physique mathématique.

L'apport de N. Muskhelishvili, ainsi que d'autres chercheurs de renom poursuivant des études dans la même direction, est prépondérant dans le développement de la théorie des équations intégrales singulières unidimensionnelles et de ses applications dans les domaines les plus diverses de la physique mathématique.

Malgré tout, la complexité des équations singulières pouvait au départ effrayer de nombreux chercheurs et, particulièrement, les praticiens qui rencontraient ces problèmes pour la première fois. Toutefois, s'étant peu à peu familiarisés avec cet appareil vigoureux, ils commençaient à comprendre l'étendue du domaine des problèmes de physique mathématique qu'il peut englober. Bien entendu, tout cela ne pouvait être assimilé d'emblée, mais nécessitait un certain temps et de longues et intenses réflexions. Il convient de souligner que la tentative d'analyser quelques problèmes types de la théorie de l'élasticité à l'aide des équations de Fredholm de deuxième espèce, même si elles étaient volontairement adaptées à ces problèmes, s'avère parfois techniquement plus complexe que celle, plus naturelle, réalisée à l'aide d'équations singulières. (Pour éviter d'être mal compris, précisons que l'on peut aisément donner des exemples contraires.)

Précisons également une circonstance incitant à la prudence (et cela non seulement pour les praticiens) en ce qui concerne les équations intégrales singulières. Par son essence même l'appareil mathématique des équations intégrales prévoit en règle générale un calcul numérique approché. Or, la question du calcul des intégrales singulières et particulièrement des intégrales bidimensionnelles, d'une importance capitale pour les applications de tels ou tels algorithmes, restait ouverte jusqu'à une époque récente. Il fallait de plus apporter des modifications de principe, très importantes, aux démonstrations connues de la convergence de telle ou telle méthode approchée que l'on utilisait pour les équations régulières.

Il convient de rappeler que notre article de fond reflète une prise de conscience manifeste de l'intérêt qu'offrent les équations intégrales singulières (cf. Travaux du Congrès national de mécanique théorique et appliquée, Editions de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., 1962).

La situation est beaucoup plus simple en ce qui concerne les problèmes fondamentaux bidimensionnels (plans) de la théorie de l'élasticité. Divers auteurs ont obtenu dans ce cas des équations intégrales régulières. Elles ont été étudiées de façon exhaustive et sont encore aujourd'hui largement utilisées dans les applications pratiques.

Profitons de l'occasion pour souligner les mérites universellement reconnus de G. Kolossov dans le développement de la théorie de l'élasticité. Ses travaux ainsi que ceux de N. Muskelishvili sont à la base de l'appareil spécial et ramifié, élaboré par de nombreux chercheurs afin d'étudier divers problèmes complexes bidimensionnels de la théorie de l'élasticité.

Il convient de citer parmi les acquisitions les plus intéressantes le travail de V. Fock (1926), qui le premier a appliqué les transformations conformes pour ramener le problème plan concernant un

domaine fini simplement connexe à une équation de Fredholm de deuxième espèce (auparavant Lauricella avait ramené directement le même problème à une équation de Fredholm de structure différente sans avoir recours à une application conforme).

Il est naturel que les approches proposées pour l'établissement des équations intégrales singulières des problèmes spatiaux aient pu être appliquées aux problèmes plans, ce qui conduisit en définitive aux équations intégrales singulières unidimensionnelles correspondantes. Notons également que les équations intégrales singulières se construisent sans difficultés pour les problèmes dans lesquels on donne les conditions aux limites mixtes et dans le cas où les corps présentent des coupures curvilignes de configuration quelconque.

Outre les études citées, on poursuit à l'heure actuelle l'étude de classes spéciales de problèmes tridimensionnels de la théorie de l'élasticité fondée d'ailleurs sur les applications des équations intégrales sous telle ou telle forme. Par exemple, on ne peut laisser en dehors de la présente étude un nombre important de travaux dans lesquels, à l'aide d'une superposition des états plans de contrainte, on ramène les problèmes à symétrie axiale de l'élasticité à des équations intégrales régulières et singulières; pour cela on utilise simultanément la théorie générale et des aspects très spécialisés de la théorie des fonctions analytiques. Plus tard, cette méthode a permis de passer à l'étude des problèmes concernant les corps de révolution soumis à des contraintes autres que celles à symétrie axiale. Pour certains problèmes relatifs aux corps de révolution soumis à des charges spéciales on a réussi à obtenir une solution explicite (en quadratures). On a étudié dernièrement de vastes classes de corps obtenus précisément par déplacement d'un contour fermé. Il faut enfin remarquer que l'approche, dont nous avons débattue et que nous avons bâtie sur la base d'une conception physique claire et bien fondée, doit présenter de par sa nature même des perspectives intéressantes.

Parallèlement à ce que nous avons exposé, il existe d'autres variantes, toutes aussi curieuses, développées par G. Polozhij, consistant à utiliser, dans les mêmes problèmes à symétrie axiale, les fonctions de la variable complexe. Les procédés qu'il emploie pour les réduire à des équations de Fredholm revêtent un caractère purement mathématique et sont fondées sur l'utilisation de certaines classes de fonctions analytiques généralisées; leurs propriétés ont été étudiées en détail par l'auteur.

Signalons également les travaux dans lesquels les équations intégrales du problème à symétrie axiale sont construites sur la base des équations intégrales spécialement adaptées du problème général (spatial), et également à l'aide de potentiels spéciaux à symétrie axiale.

Les faits et les trouvailles que nous avons exposés ont été rassemblés au prix d'un travail intense et systématiquement analysés

pour en extraire une synthèse globale; ils constituent un facteur d'une importance croissante. Cela va, d'une part, favoriser le développement constant des algorithmes de calcul et, d'autre part, contribuer activement à l'évolution des possibilités des ordinateurs.

Dans cet ouvrage, les auteurs ont exposé aussi bien les problèmes liés à la théorie générale des équations intégrales régulières et singulières que la théorie correspondante des méthodes approchées de leur résolution; ils ont ensuite passé à l'étude des équations intégrales des problèmes plan et spacial de l'élasticité et ont terminé leur étude par une analyse de diverses méthodes de calcul.

Les auteurs pensent qu'ils ont agi avec sagesse et clairvoyance en proposant un exposé volontairement simpliste de la matière (concernant principalement la théorie des équations intégrales singulières bidimensionnelles et ses applications); par ailleurs ils se sont appliqués à exposer les matières de façon claire et nette et ont fait preuve d'une extrême vigilance pour éviter que des éléments de vulgarisation ne s'y manifestent par hasard. Ce style d'exposé a été adopté dans le but avoué de rendre le livre accessible au cercle de représentants de la pensée technique le plus large possible et, par là même, de favoriser la diffusion de la méthode du potentiel la plus grande possible. Cela ne manquera pas de se faire sentir sur l'échelle de divulgation de la théorie classique de l'élasticité dans les domaines appliqués. Nous pouvons recommander aux lecteurs qui, après avoir étudié le présent ouvrage, auraient ressenti un intérêt pour l'objet de son exposé et souhaiteraient élargir et approfondir leurs connaissances en ce domaine, les monographies de F. Gakhov, V. Kupradze, S. Mikhline, N. Muskhelishvili, A. Tikhonov et V. Arsenine, présentant chacune un apport particulier.

En suivant rigoureusement la ligne d'action qu'ils se sont fixée et que l'on ressent tout au long de l'exposé, les auteurs montrent constamment et fermement les avantages d'une utilisation rationnelle des méthodes de calcul numériques à la résolution des équations intégrales de l'élasticité pour un assez grand nombre de problèmes. Cela apparaît clairement dans le choix de la matière de l'ouvrage, qui est méticuleux et orienté de manière manifeste et qui est entièrement consacré à l'exposé détaillé d'un cycle de problèmes classiques de la théorie de l'élasticité; ces derniers s'avèrent être tout à fait conformes et favorisent la démonstration de l'efficacité de l'analyse numérique (en faisant évidemment appel à l'ordinateur). D'ailleurs, on effectue le choix de la matière à partir d'un arsenal considérable de problèmes et d'approches proposées à leur solution, en un mot de tout ce dont dispose la théorie de l'élasticité mathématique moderne.

Il convient de souligner l'importance des travaux originaux des auteurs représentés dans cet ouvrage. Le recours direct à la représentation régulière des intégrales singulières permettant maintenant d'utiliser sans peine les formules d'intégration établies pour les

intégrales impropres a une grande importance ; les méthodes proposées pour la résolution pratique d'une classe spéciale d'équations intégrales par factorisation approchée dûment réalisée attirent également attention. La méthode de résolution des équations intégrales des problèmes spatiaux par approximations successives (étant donné les avantages évidents obtenus avec l'ordinateur) est vigoureusement défendue dans l'ouvrage. On a établi que le processus d'itération est toujours convergent (en principe). Cependant on a démontré que l'erreur du schéma de calcul (introduite par une valeur propre) peut en fait conduire à la divergence de l'algorithme. Pour éliminer ce genre d'inconvénient, on propose (autant que je sache pour la première fois) d'introduire dans le second membre à chaque itération une petite grandeur supplémentaire appropriée, exprimée de manière adéquate au moyen des fonctions fondamentales connues de l'équations associée. Au premier abord cette opération paraît simple, cependant on n'y est parvenu qu'après de nombreuses tentatives et de longues méditations, comme cela se produit généralement dans pareils cas.

Nous avons toutes les raisons de supposer que la publication de ce livre sera accueillie avec intérêt et trouvera un écho favorable. Grâce à l'accessibilité de l'exposé le lecteur pourra s'initier rapidement aux problèmes abordés. De plus et c'est l'essentiel, le livre sera un manuel précieux pour les jeunes travailleurs scientifiques (y compris ceux qui s'occupent activement des problèmes d'application) sur la voie difficile d'une assimilation critique et de la maîtrise des différents algorithmes de calcul. Cette tâche ne serait être ajournée, faute de quoi l'emploi correct de ces algorithmes et leur développement ultérieur sont impossibles. Tout ce que nous jugions indispensable de noter à propos des particularités de ce livre justifie sa publication.

Nous terminerons notre exposé par la remarque suivante qui nous semble d'une actualité brûlante. Le progrès scientifique et technique, auquel nous avons eu la chance d'assister, embrasse presque toutes les branches de la science et de ses applications. La nécessité de suivre son temps augmente de beaucoup le sentiment de responsabilité qu'éprouve chaque travailleur scientifique. Tout chercheur dans le domaine de la théorie mathématique de l'élasticité et surtout dans la physique mathématique doit dans ces conditions soumettre à un examen critique ses propres résultats, porter ses efforts sur les aspects de ses recherches qui ont encore grandement besoin d'être poussés, en rejeter courageusement et sans la moindre hésitation la partie qui a perdu de son efficacité et ne supporte plus la comparaison avec les travaux nouvellement parus. Rares sont ceux qui parviennent à accomplir cette révision sans douleur. Cela s'accompagne de doutes pénibles et de longues méditations. La question n'est pas, bien entendu, dans la difficulté de surmonter un

2—0340

amour-propre mal placé ; elle tient à d'autres raisons plus importantes et fort compréhensibles. En effet, la question abordée, aussi pénible qu'elle soit, est parfois effectivement inséparable d'une évaluation globale de l'activité du chercheur. Même posée de façon moins radicale, cette question n'en devient pas pour cela plus simple. En effet, d'un point de vue psychologique, il est très difficile de renoncer aux résultats partiels sur lesquels on a peiné pendant une période plus ou moins longue et sur lesquels on a dépensé beaucoup d'efforts. Quoiqu'il en soit, le chercheur doit suivre son temps et trouver en lui la force d'accomplir le nécessaire, en faisant abstraction des penchants et des inclinations enracinés, dont, semble-t-il, on ne saurait se libérer. La dialectique de la vie est inexorable.

Entre autres, il ne faut pas prendre de retard, ni attendre que quelqu'un d'autre, de sa propre initiative, commence à soumettre à un examen critique les travaux et théories qui en ont besoin. De toute évidence, il ne pourra le faire avec tout le soin et la compétence indispensables dans des circonstances aussi délicates ; il n'est pas exclu non plus qu'un zèle intempestif dans l'accomplissement de cette mission librement consentie diminue involontairement l'aspect positif de ces travaux.

A cette occasion, la question se pose d'elle-même de savoir dans quelle mesure les états d'âme pessimistes et la déception engendrés par la situation actuelle sont fondés. A notre avis, en règle générale, il n'y a pour cela aucune raison sérieuse. Bien entendu, rares sont ceux qui pourraient se vanter d'être assaillis par une profusion d'idées nouvelles. Ce privilège est réservé aux enfants gâtés de la fortune, aux dons exceptionnels. De toute façon, de bonnes idées viennent aussi aux chercheurs qui travaillent constamment et assidûment et s'adonnent avec abnégation à leur tâche. Et ils sont une majorité écrasante. L'intuition ressentie un jour, développée par la suite et formulée clairement, laisse presque toujours son empreinte, elle contribue avec d'autres à l'ensemble des résultats partiels et des connaissances accumulées qui préparent le terrain à un progrès qualitatif décisif et longtemps attendu.

Tout ce qui a été créé dans le passé et le présent survivra dans une certaine mesure (peut-être sous une forme modifiée). Les fils du passé se rompent rarement, ils s'étendent presque toujours vers l'avenir. L'immutabilité de ce principe est claire en soi, elle est habituellement confirmée par le développement des idées scientifiques. C'est précisément là que chacun de nous doit trouver une satisfaction et un stimulant moral pour son propre travail.

*D. Sherman*

# NOTATIONS

En caractères gras sont désignés les matrices, les vecteurs et les opérateurs.

| | |
|---|---|
| $\lambda, \mu$ | coefficients de Lamé |
| $E = \frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$ | module d'élasticité |
| $\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | coefficient de Poisson |
| $D$ | domaine (tridimensionnel ou plan) |
| $S$ | surface |
| $L$ | contour |
| $p$ | point d'un domaine (tridimensionnel ou plan) |
| $z = x + iy$ | point d'un domaine (plan) |
| $p, q, q'$ | points d'une surface |
| $q, t, \tau$ | points d'un contour |
| $\boldsymbol{n}(n_x, n_y, n_z)$ | normale unité à une surface, d'ordinaire extérieure (si la surface est fermée) |
| $\boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}(p)}$ | opérateur des contraintes |
| $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{n}(p)}$ | opérateur $\boldsymbol{N}$ |
| $\boldsymbol{\Gamma}(p, q)$ | matrice de Kelvin-Somigliana (noyau d'un potentiel de couche simple) |
| $\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)$ | matrice (noyau d'un potentiel de couche double de première espèce) |
| $\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{II}}(p, q)$ | matrice (noyau d'un potentiel de couche double de deuxième espèce) |
| $\boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)$ | matrice (résultat de l'application de l'opérateur des contraintes à la matrice $\boldsymbol{\Gamma}(p, q)$ ; $\boldsymbol{\Gamma}_1(p, q) = \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{n}(p)}\boldsymbol{\Gamma}(p, q)$) |
| $\boldsymbol{\varphi}(q)\,(\varphi_1(q), \varphi_2(q), \varphi_3(q))$ | densité des potentiels |
| $\boldsymbol{V}(p) = \boldsymbol{V}(p, \boldsymbol{\varphi})$ | écriture symbolique d'un potentiel de couche simple de densité $\boldsymbol{\varphi}$ |
| $\boldsymbol{W}(p) = \mathbf{W}(p, \boldsymbol{\varphi})$ | écriture symbolique d'un potentiel de couche double de densité $\boldsymbol{\varphi}$ |
| $f(q, \psi)$ | caractéristique d'une intégrale singulière |

| | |
|---|---|
| $\Phi(q, \lambda)$ | symbole d'opérateur singulier |
| $K$, $\tilde{K}$, $A$ | écriture commune des opérateurs |
| $z = \omega(\zeta)$ | fonction d'application conforme |
| $P_n(x)$ | polynôme de Legendre de degré $n$ |
| $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ | polynôme de Jacobi de degré $n$ |
| $K(x, y)$, $\Gamma_1(q, q')$, $\Gamma_2(q, q')$ | noyaux des équations intégrales |
| $\Gamma(x, y, \lambda)$ | résolvante d'une équation intégrale |

**Problème tridimensionnel**

| | |
|---|---|
| $x_1, x_2, x_3$; $y_1, y_2, y_3$ | coordonnées cartésiennes |
| $\sigma_{ij}$ | composantes du tenseur des contraintes |
| $u(u_1, u_2, u_3)$ | vecteur des déplacements |
| $\varepsilon_{ij}$ | composantes du tenseur des déformations |

**Problème bidimensionnel**

| | |
|---|---|
| $x, y, z$ | coordonnées cartésiennes |
| $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ | composantes du tenseur des contraintes |
| $u, v, w$ | composantes du vecteur des déplacements |

CHAPITRE PREMIER

# ÉLÉMENTS DE THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES UNIDIMENSIONNELLES ET MULTIDIMENSIONNELLES

## § 1. Théorie analytique de la résolvante

Considérons une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce. Pour plus de simplicité limitons-nous au cas d'une dimension :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + F(x). \tag{1.1}$$

Supposons le noyau $K(x, y)$ une fonction intégrable par rapport à $x$ et $y$ $(a \leqslant x \leqslant b,\ a \leqslant y \leqslant b)$ et recherchons la solution de l'équation (1.1) sous forme d'une série

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \ldots \tag{1.2}$$

Si la série est uniformément convergente pour certaines valeurs du paramètre $\lambda$, nous pouvons la porter dans l'équation (1.1) et, égalant les coefficients des mêmes puissances de $\lambda$, obtenir les relations de récurrence

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x) = \int_a^b K(x, y)\, \varphi_{i-1}(y)\, dy \quad (i = 1, 2, \ldots), \\ &\varphi_0(x) = F(x). \end{aligned} \tag{1.3}$$

Supposons que le noyau $K(x, y)$ et la fonction $F(x)$ sont bornés $(|K(x, y)| < A,\ |F(x)| < M)$. Il découle alors des relations (1.3) que la solution recherchée (1.2) est majorée par la série

$$M \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n (b-a)^n A^n.$$

Donc la série (1.2) sera convergente à condition que

$$|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}. \tag{1.4}$$

Compte tenu des relations (1.3) on obtient une autre représentation de la série (1.2):

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \left\{ \int_a^b K_1(x, y) F(y)\, dy + \lambda \int_a^b K_2(x, y) F(y)\, dy + \ldots \right\}. \tag{1.5}$$

Les noyaux $K_n(x, y)$ sont liés entre eux par les relations

$$K_n(x, y) = \int_a^b K(x, t) K_{n-1}(t, y)\, dt \quad (n = 2, 3, \ldots),$$

$$K_1(x, y) = K(x, y). \tag{1.6}$$

En vertu de la même condition (1.4) la série

$$K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \ldots \tag{1.7}$$

converge.

Aussi pouvons-nous intervertir l'ordre d'intégration et de sommation dans la représentation (1.5). Introduisons pour la série (1.7) la notation $\Gamma(x, y, \lambda)$. Cette fonction $\Gamma(x, y, \lambda)$ est appelée *résolvante de l'équation* (1.1). La représentation cherchée de la solution de l'équation (1.1) est de la forme

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda \int_a^b \Gamma(x, y, \lambda) F(y)\, dy. \tag{1.8}$$

De sorte que, la résolvante étant connue, on obtient d'emblée la solution de l'équation proposée à second membre arbitraire (pour un $\lambda$ suffisamment petit).

Remarquons que si pour la convergence des séries obtenues l'inégalité (1.4) était exigée, pour la construction des coefficients eux-mêmes seule l'intégrabilité du noyau $K(x, y)$ est nécessaire.

Exprimant alors tous les coefficients $K_n(x, y)$ par le noyau $K(x, y)$ de l'équation proposée on obtient aisément les égalités suivantes:

$$K_n(x, y) = \underbrace{\int_a^b \int_a^b \ldots \int_a^b}_{n-1} K(x, t_{n-1}) K(t_{n-1}, t_{n-2}) \ldots$$

$$\ldots K(t_1, y)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1}, \tag{1.9}$$

$$K_{p+q}(x, y) = \int_a^b K_p(x, t) K_q(t, y)\, dt. \tag{1.10}$$

Pour le cas particulier ($p=n-1$, $q=1$) nous obtenons

$$K_n(x, y) = \int_a^b K_{n-1}(x, t) K(t, y)\, dt \quad (n=2, 3, \ldots). \qquad (1.11)$$

Revenons à la représentation de la résolvante (1.7) supposant $\lambda$ suffisamment petit, et considérons la suite d'égalités

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K_1(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \lambda^2 K_3(x, y) + \ldots =$$
$$= K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, t) K_1(t, y)\, dt + \lambda \int_a^b K(x, t) K_2(t, y)\, dt + \ldots =$$
$$= K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, t) [K_1(t, y) + \lambda K_2(t, y) + \ldots]\, dt =$$
$$= K(x, y) + \lambda \int_a^b K(x, t) \Gamma(t, y, \lambda)\, dt. \qquad (1.12)$$

On peut considérer cette relation comme une équation fonctionnelle de la résolvante. Par ailleurs, partant de la formule (1.11) on peut obtenir une autre équation fonctionnelle de la résolvante

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda \int_a^b K(t, y) \Gamma(x, t, \lambda)\, dt. \qquad (1.13)$$

Notons que sous la condition (1.4) la résolvante est une fonction analytique du paramètre $\lambda$ dans le cercle $|\lambda| < \frac{1}{A(b-a)}$. Nous avons défini plus haut la résolvante pour cette contrainte précisément. Les relations (1.12) et (1.13), elles, permettent de déterminer la résolvante dans tout le plan de la variable complexe, exception faite de quelques valeurs seulement.

Supposons que dans le carré $a \leqslant x$, $y \leqslant b$ existe la fonction $\Gamma(x, y, \lambda)$ définie pour une valeur déterminée de $\lambda$ et vérifiant les relations (1.12) et (1.13). Montrons que dans ce cas l'équation (1.1) admet une solution, qui se représente sous la forme (1.8). Multiplions les deux membres de l'équation (1.1) par $\lambda\Gamma(x, y, \lambda)$ et intégrons par rapport à $x$. Transformant l'expression obtenue à l'aide de la relation (1.13) nous parvenons à l'égalité

$$\lambda \int_a^b F(x) \Gamma(y, x, \lambda)\, dx - \lambda \int_a^b K(x, y) \varphi(y)\, dy = 0$$

qui, compte tenu de (1.1), conduit à la représentation demandée:

$$\varphi(y)=\lambda\int_a^b \Gamma(y, x, \lambda) F(x)\,dx+F(y).$$

Reste à montrer que la fonction représentée par l'expression (1.8) est la solution de l'équation (1.1). En effet, portant (1.8) dans l'équation (1.1) nous aboutissons à une identité (compte tenu naturellement de la relation (1.12)).

Démontrons ensuite que la résolvante représente le rapport de deux fonctions entières, analytiques sur tout le plan de la variable complexe $\lambda$. Considérons le déterminant

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix}= \\ =\begin{vmatrix} K(x_1, y_1) & K(x_1, y_2) & \dots & K(x_1, y_n) \\ K(x_2, y_1) & K(x_2, y_2) & \dots & K(x_2, y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ K(x_n, y_1) & K(x_n, y_2) & \dots & K(x_n, y_n) \end{vmatrix}. \qquad (1.14)$$

En vertu du théorème d'Hadamard (cf. E. Goursat *[1]*)) nous obtenons l'estimation suivante**:

$$K\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix}< n^{n/2}A^n, \qquad (1.15)$$

la somme des carrés des éléments de chacune des lignes étant inférieure à $nA^2$.

Formons la fonction

$$D(\lambda)=1-\frac{\lambda}{1!}\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1 \\ t_1 \end{pmatrix} dt_1+\frac{\lambda^2}{2!}\int_a^b\int_a^b K\begin{pmatrix} t_1, t_2 \\ t_1, t_2 \end{pmatrix} dt_1\,dt_2-\dots$$

$$\dots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\underbrace{\int_a^b\dots\int_a^b}_{n} K\begin{pmatrix} t_1, t_2, \dots, t_n \\ t_1, t_2, \dots, t_n \end{pmatrix} dt_1\,dt_2\dots dt_n+\dots=$$

$$=1-\frac{\lambda}{1!}c_1+\frac{\lambda^2}{2!}c_2-\dots+(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}c_n+\dots \qquad (1.16)$$

---

*) La bibliographie est répartie en deux listes: une liste d'auteurs russes et l'autre d'auteurs étrangers. L'astérisque renvoie à la liste des auteurs étrangers.

**) Si, dans un déterminant d'ordre $n$, sont données les sommes des carrés des éléments de ses lignes, alors le déterminant lui-même sera inférieur à la racine carrée du produit de ces sommes.

En utilisant l'inégalité (1.15) nous obtenons une estimation pour chaque terme de la série (1.16) d'où il ressort que cette série converge pour toutes les valeurs de $\lambda$ et représente une fonction entière appelée *déterminant de Fredholm du noyau* $K(x, y)$.

Introduisons une nouvelle fonction $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ posant

$$\Gamma(x, y, \lambda) = \frac{D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}. \tag{1.17}$$

On obtient alors des relations (1.12) pour déterminer la fonction $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ l'équation

$$D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) = \lambda\int_a^b K(x, t)\, D\left(\begin{smallmatrix} t \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) dt + D(\lambda)\, K(x, y). \tag{1.18}$$

Nous rechercherons la solution de cette équation sous la forme d'une série suivant les puissances de $\lambda$, écrivant pour des raisons de commodité la fonction $D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right)$ sous la forme:

$$D\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\middle|\lambda\right) = q_0(x, y) - \frac{\lambda}{1!}\, q_1(x, y) - \ldots + (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!}\, q_n(k, y) + \ldots \tag{1.19}$$

Portons ensuite les séries (1.16) et (1.17) (compte tenu de (1.19)) dans l'équation (1.18) et égalons les coefficients des mêmes puissances de $\lambda$:

$$q_0(x, y) = K(x, y), \tag{1.20}$$

$$q_n(x, y) = c_n K(x, y) - (-1)^{n-1}\, n\int_a^b K(x, t)\, q_{n-1}(t, y)\, dt. \tag{1.21}$$

Ces égalités permettent de calculer successivement tous les coefficients $q_n(x, y)$. On peut obtenir en outre l'expression générale des coefficients $q_n(x, y)$ si l'on prend en considération la fonction $L_n(x, y)$:

$$L_n(x, y) = \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{n} K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} dt_1\, dt_2 \ldots dt_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.22}$$

Il est évident que $L_0(x, y) = K(x, y)$. On peut montrer également par un calcul direct la validité de l'égalité $L_1(x, y) = q_1(x, y)$ et

démontrer qu'en général

$$L_n(x, y) = q_n(x, y) \quad (n = 2, 3, \ldots). \tag{1.23}$$

Montrons tout d'abord que les fonctions $L_n(x, y)$ vérifient la relation coïncidant avec (1.21):

$$L_n(x, y) = c_n K(x, y) - (-1)^{n-1} n \int_a^b K(x, t) L_{n-1}(t, y)\, dt. \tag{1.24}$$

D'ici et de l'égalité des fonctions $L_0$ et $q_0$, $L_1$ et $q_1$ découle (1.23).

Remarquons que l'expression $K\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n \\ y_1, & y_2, & \ldots, & y_n \end{pmatrix}$ ne fait que changer de signe quand on transpose deux éléments $x_i$ ou deux éléments $y_i$. Développons le déterminant $K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix}$ suivant les éléments de la première ligne tout en tenant compte de cette remarque:

$$K\begin{pmatrix} x, & t_1, & \ldots, & t_n \\ y, & t_1, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} = K(x, y)\, K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} -$$

$$- K(x, t_1)\, K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ y, & t_2, & \ldots, & t_n \end{pmatrix} - \ldots - K(x, t_n)\, K\begin{pmatrix} t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ t_1, & t_2, & \ldots, & y \end{pmatrix}.$$

Intégrant les deux membres de cette relation par rapport à toutes les variables $t_i$ et réalisant dans chaque terme une transposition adéquate des notations *) nous aboutissons à la relation recherchée (1.24). Faisant de nouveau appel au théorème d'Hadamard nous obtenons l'estimation

$$|q_n(x, y)| \leqslant (n+1)^{\frac{n+1}{2}} M^{n+1} (b-a)^n,$$

d'où il ressort que la série (1.19) représente une fonction entière.

Ainsi on a démontré que la résolvante est une fonction méromorphe de la variable complexe. Puisque la résolvante $\Gamma(x, y, \lambda)$ existe pour des $\lambda$ suffisamment petits (l'inégalité (1.4)) et qu'elle est méromorphe dans tout le plan de $\lambda$, il résulte donc du théorème généralisé de Liouville que la résolvante existe pour tout $\lambda$ (exception faite des valeurs pour lesquelles $D(\lambda) = 0$). Par conséquent l'équation de Fredholm (1.1) est résoluble de façon univoque pour tout $\lambda$ différent des zéros du déterminant $D(\lambda)$.

Limitons-nous aux valeurs de $\lambda$ ($\lambda = \lambda_0$) qui annulent le déterminant de Fredholm et sont appelées *valeurs propres de l'équation*

---

*) $t_i$ et $t_1$ sont changés de place dans le $i$-ième terme.

*intégrale*. Le déterminant $D(\lambda)$ étant une fonction entière, seul un nombre fini de valeurs propres peut être compris dans une partie limitée du plan de $\lambda$. Il peut arriver que ce même nombre $\lambda_0$ annule la fonction $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ aussi (pour n'importe quelles valeurs de $x$ et $y$). Montrons que la multiplicité de la racine au numérateur sera malgré tout inférieure à sa multiplicité au dénominateur. Soient les représentations

$$D(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k D_0(\lambda), \quad D_0(\lambda_0) \neq 0,$$
$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right) = (\lambda - \lambda_0)^l D_0\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right), \tag{1.25}$$

où $D_0\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}\middle|\lambda\right)$ est une série développée suivant les puissances positives de $\lambda$, dont le terme constant en $\lambda$ est différent de zéro pour certaines valeurs de $x$ et $y$. Il est évident que $D'(\lambda)$ admet au point $\lambda_0$ un zéro d'ordre $k-1$.

Posons dans les premier et second membres de la formule (1.19) $y = x$ et intégrons par rapport à $x$:

$$\int_a^b D\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\middle|\lambda\right) dx = \int_a^b K(x, x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b L_n(x, x)\, dx =$$
$$= c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} \underbrace{\int_a^b \int_a^b \cdots \int_a^b}_{n+1} K\left(\begin{matrix} x, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \\ x, & t_1, & t_2, & \ldots, & t_n \end{matrix}\right) \times$$
$$\times\, dt_1 \ldots dt_n\, dx = c_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^n}{n!} c_{n+1} = -D'(\lambda). \tag{1.26}$$

Dans le cas considéré cette équation peut s'écrire sous une autre forme:

$$D'(\lambda) = -(\lambda - \lambda_0)^l \int_a^b D_0\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}\middle|\lambda\right) dx. \tag{1.27}$$

Il peut arriver que l'intégration fasse apparaître encore une puissance du facteur $(\lambda - \lambda_0)$, d'où il découle $k - 1 \geqslant l$ et donc $k > l$. Ainsi les pôles de la résolvante doivent coïncider nécessairement avec les zéros du déterminant de Fredholm.

Supposons que $\lambda_0$ est un pôle de multiplicité $r$ de la résolvante. On a alors le développement *)

$$\frac{D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\middle|\lambda\right)}{D(\lambda)}=\frac{a_{-r}(x,\ y)}{(\lambda-\lambda_0)^r}+\frac{a_{-r+1}(x,\ y)}{(\lambda-\lambda_0)^{r-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}(x,\ y)}{\lambda-\lambda_0}+\sum_{i=0}^{\infty}a_i(x,\ y)(\lambda-\lambda_0)^i. \qquad (1.28)$$

Portons la série (1.28) dans l'équation fonctionnelle (1.12) et multiplions-la successivement par les facteurs $(\lambda - \lambda_0)^n$ $(n = r,$ $r - 1, \ldots)$ et soit ensuite $\lambda = \lambda_0$. On obtient alors les relations

$$a_{-r}(x,\ y)=\lambda_0\int_a^b K(x,\ t)\,a_{-r}(t,\ y)\,dy)\,dt, \qquad (1.29)$$

$$a_{-r+1}(x,\ y)-\frac{a_{-r}(x,\ y)}{\lambda_0}=\lambda_0\int_a^b K(x,\ t)\,a_{-r+1}(t,\ y)\,dt \qquad (1.30)$$

et ainsi de suite. Il découle de la relation (1.29) que le coefficient $a_{-r}(x,\ y)$ comme fonction de $x$ pour une valeur arbitraire fixée de $y$ (considéré comme paramètre) représente la solution de l'équation homogène

$$\varphi(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Les solutions non triviales de l'équation homogène sont appelées *fonctions propres* (ou *zéros*) *correspondant à la valeur propre* $\lambda_0$.

Répétant les raisonnements précédents pour l'équation (1.13) nous obtenons des relations analogues à (1.29) et (1.30). En particulier, le coefficient $a_{-r}(x,\ y)$ comme fonction de $y$ pour une valeur fixée de $x$ s'avère fonction propre de l'équation homogène

$$\psi(x)=\lambda_0\int_a^b K(y,\ x)\,\psi(y)\,dy, \qquad (1.31)$$

appelée *associée* (ou *transposée*) *de l'équation* (1.1).

Pour édifier une théorie exhaustive il faut étudier en outre la question de la résolubilité des équations intégrales dont le paramètre est une valeur propre. Comme il est aisé de voir, la résolvante de l'équation associée s'obtient de la résolvante de l'équation initiale par transposition des variables. Par conséquent les déterminants de

*) Le paramètre $\lambda$ est omis dans les coefficients $a_n(x,\ y)$.

Fredholm des équations initiale et associée coïncident entre eux. Pour la même raison coïncident aussi les valeurs (nombres) propres.

Démontrons que le nombre de fonctions propres correspondant à la même valeur $\lambda_0$ est fini (on envisage les solutions linéairement indépendantes). Soient $\varphi_1^*(x)$, $\varphi_2^*(x)$, . . ., $\varphi_m^*(x)$ des fonctions propres orthonormées correspondant au nombre $\lambda_0$. Considérons les équations auxquelles satisfont ces fonctions:

$$\frac{\varphi_i^*(x)}{\lambda_0} = \int_a^b K(x, y)\,\varphi_i^*(y)\,dy. \qquad (1.32)$$

Le second membre est évidemment le coefficient de Fourier de la fonction $K(x, y)$ (en tant que fonction de l'argument $y$) par rapport au système orthonormé de fonctions $\varphi_i^*(y)$. Il découle alors de l'inégalité de Bessel ($m$ est le nombre de fonctions propres) que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\varphi_i^{*2}(x)}{\lambda_0^2} \leqslant \int_a^b K^2(x, y)\,dy.$$

Intégrant les deux membres de la dernière inégalité par rapport à $x$ tout en tenant compte de ce que les fonctions propres sont normées, nous obtenons

$$\frac{m}{\lambda_0^2} \leqslant \int_a^b \int_a^b K^2(x, y)\,dx\,dy < \infty.$$

Il découle de cette estimation que le nombre de fonctions propres est un nombre fini.

Démontrons que le nombre de fonctions propres de l'équation initiale et de son associée (pour la même valeur propre naturellement) coïncident entre elles. Admettons qu'on a $m$ fonctions propres orthonormées $\varphi_j^*(x)$ de l'équation initiale et $n$ fonctions de l'équation associée désignées par $\psi_j^*(x)$. Supposons que $m < n$ et considérons les deux équations associées

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b \left[K(x, y) - \sum_{j=1}^{m} \psi_j^*(x)\,\varphi_j^*(y)\right] \varphi(y)\,dy, \qquad (1.33)$$

$$\psi(x) = \lambda_0 \int_a^b \left[K(y, x) - \sum_{j=1}^{m} \psi_j^*(y)\,\varphi_j^*(x)\right] \psi(y)\,dy. \qquad (1.34)$$

Démontrons que l'équation (1.33) n'admet pas de fonctions propres. Multiplions cette équation par l'une quelconque des fonctions $\psi_j^*(x)$ $(j \leqslant m)$ et intégrons par rapport à $x$. Intervertissant dans

l'intégrale double l'ordre d'intégration (les fonctions $\psi_j^*(x)$ étant orthonormées) on obtient l'égalité

$$\int_a^b \varphi_j^*(x)\,\varphi(x)\,dx = 0, \tag{1.35}$$

vérifiée pour tout $j \leqslant m$. Par conséquent chaque solution de l'équation (1.33) vérifie l'équation (1.1), lorsque le second membre de celle-ci est nul, donc est une fonction propre. Aussi cette solution doit-elle être représentée sous la forme d'une somme

$$\varphi(x) = \sum_{j=1}^{m} c_j \varphi_j^*(x).$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par une fonction quelconque $\varphi_k^*(x)$ et intégrons par rapport à $x$:

$$\int_a^b \varphi(x)\,\varphi_k^*(x)\,dx = \sum_{j=1}^{m} c_j \int_a^b \varphi_k^*(x)\,\varphi_j^*(x)\,dx.$$

Il en découle que $c_k = 0$, donc l'équation (1.33) n'a pas de fonctions propres. Une substitution directe montre que les fonctions $\psi_j^*(x)$ $(j > m)$ sont solutions de l'équation (1.34). Les équations (1.33) et (1.34) sont associées et d'après ce qui a été démontré plus haut leurs valeurs propres doivent coïncider entre elles, or $\lambda_0$ n'est pas valeur propre de l'équation (1.33), mais valeur propre de (1.34). Nous avons ainsi établi une contradiction.

Passons maintenant concrètement à l'étude du problème de la résolubilité de l'équation intégrale (1.1). Considérons l'équation

$$\varphi(x) = \lambda_0 \int_a^b \Big[K(x, y) - \sum_{j=1}^{m} \varphi_j^*(x)\,\varphi_j^*(y)\Big]\,\varphi(y)\,dy + F(x), \tag{1.36}$$

qui, en vertu de ce qui a été énoncé plus haut, est résoluble pour tout second membre. Agissant comme précédemment, autrement dit multipliant les premier et second membres par une fonction quelconque $\psi_k(x)$ et intégrant, nous parvenons à l'égalité

$$\lambda_0 \int_a^b \psi_k^*(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_a^b \psi_k^*(x)\,F(x)\,dx. \tag{1.37}$$

Si l'on exige que les conditions

$$\int_a^b \psi_k^*(x)\,F(x)\,dx = 0 \tag{1.38}$$

soient remplies, alors l'équation (1.36) est simplement ramenée à l'équation initiale (1.1) (puisque sont vérifiées $m$ égalités semblables) qui de la sorte se trouve être résoluble. Démontrons également que les conditions (1.38) sont nécessaires pour la résolubilité de l'équation (1.1). Pour cela multiplions (1.1) par une fonction quelconque $\psi_k^*(x)$ et intégrons par rapport à $x$. Intervertissant ensuite dans l'intégrale double l'ordre d'intégration nous obtenons, après une simplification adéquate, les mêmes relations (1.38).

Ainsi les conditions (1.38) sont nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une solution de l'équation intégrale dont le paramètre est une valeur propre. De telles équations ne peuvent avoir de solution unique, elle se représente à une somme de la forme $\sum_{k=1}^{m} c_k \varphi_k^*(x)$ près.

Démontrons en conclusion les égalités que nous utiliserons par la suite. Soit $\lambda_0$ une valeur propre et naturellement les conditions (1.38) sont vérifiées. On a alors les égalités

$$\int_a^b \varphi_k(x)\psi_j^*(x)\,dx = 0 \quad \begin{pmatrix} j=1, 2, \ldots, n \\ k=1, 2, \ldots, n \end{pmatrix},$$

où $\varphi_k(x)$ sont les termes de la série (1.2).

Montrons la validité de ces égalités pour la fonction $\varphi_1(x)$:

$$\int_a^b \varphi_1(x)\psi_1^*(x)\,dx = \lambda \int_a^b \int_a^b F(y) K(x, y)\psi_1^*(x)\,dy\,dx = \int_a^b F(y)\psi_1^*(y)\,dy.$$

Le passage aux autres fonctions $\varphi_k(x)$ est évident et se réalise par récurrence.

Notons que les relations (1.29) et (1.30) et des relations analogues permettent d'établir le lien existant entre les coefficients $a_{-r}(x, y)$ (pour des valeurs négatives de l'indice) dans le développement de la résolvante au voisinage du pôle et les fonctions propres correspondantes de l'équation initiale et de son associée. Ecrivons l'expression définitive de la partie non régulière

$$\frac{\lambda_0\lambda^{r-1}\varphi_1(x)\psi_r(y)}{(\lambda-\lambda_0)^r} + \ldots \frac{\lambda_0\lambda[\varphi_1(x)\psi_2(y)+\varphi_2(x)\psi_3(y)+\ldots+\varphi_{r-1}(x)\psi_r(y)]}{(\lambda-\lambda_0)^2} + \frac{\lambda_0[\varphi_1(x)\psi_1(y)+\ldots+\varphi_r(x)\psi_r(y)]}{\lambda-\lambda_0}, \quad (1.39)$$

où $\varphi_j(x)$ et $\psi_j(x)$ sont des systèmes de fonctions propres liées par les relations

$$\lambda_0 \int_a^b \varphi_j(x)\,\varphi_k(x)\,dx = \delta_{jk}, \quad \lambda_0 \int_a^b \psi_j(x)\,\psi_k(x)\,dx = \delta_{jk},$$

$$\int_a^b \varphi_j(x)\,\psi_k(x)\,dx = 0 \quad (k \neq j-1,\ j),$$

$$\lambda_0 \int_a^b \varphi_j(x)\,\psi_k(x)\,dx = 1 \quad (k = j-1,\ j).$$

Cette expression montre clairement la signification des conditions (1.38) de résolubilité de l'équation intégrale à paramètre égal à une valeur propre. En effet, faisons appel à la représentation de la solution au moyen de la résolvante (1.8). Il découle des conditions d'orthogonalité que la solution est une fonction analytique du paramètre $\lambda$. C'est pourquoi dans le cas où $\lambda_0$ est le plus petit (en module) pôle de la résolvante, la solution peut être obtenue directement par la méthode des approximations successives.

Plus haut, supposant le noyau de l'équation intégrale borné, on déterminait à l'aide d'estimations assez grossières une valeur suffisamment petite de $\lambda$ pour laquelle la représentation de la solution sous forme de série s'avérait convergente, condition nécessaire pour l'élaboration ultérieure de la théorie exhaustive. Il est toutefois possible d'étendre la théorie de la résolvante à des équations intégrales avec des contraintes moins fortes sur les noyaux. Supposons que le noyau ait une singularité faible. Transformons l'équation (1.1) substituant dans son second membre la fonction $\varphi(y)$ par sa représentation intégrale découlant de l'équation même:

$$\varphi(x) = F(x) + \lambda^2 \int_a^b K_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy + \lambda \int_a^b K(x, y)\,F(y)\,dy. \qquad (1.40)$$

$F(x)$ et $\int_a^b K(x, y)\,F(y)\,dy$ étant les premiers termes du développement de la solution en série (1.2), nous concluons que la fonction recherchée $\varphi(x)$ vérifie également l'équation

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_a^b K_2(x, y)\,\varphi(y)\,dy + \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x).$$

On montre aisément que pour tout $n$ entier on a la formule générale

$$\varphi(x) = \lambda^n \int_a^b K_n(x, y)\,\varphi(y)\,dy + S_n(x), \qquad (1.41)$$

$$S_n(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \ldots + \lambda^{n-1}\varphi_{n-1}(x).$$

Soit $n$ un nombre tel que le noyau $K_n(x, y)$ est borné. On peut alors construire, dans le domaine de $\lambda$ suffisamment petits, la résolvante de cette équation que l'on désigne par $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$. Il est évident que toute solution de l'équation (1.1) vérifie l'équation (1.41). Démontrons la réciproque, c'est-à-dire que la solution de l'équation (1.41) vérifie l'équation (1.1). Posons

$$\omega(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy - F(x), \qquad (1.42)$$

où $\varphi(x)$ est solution de l'équation (1.41).

Montrons que cette fonction vérifie l'équation intégrale homogène (1.41) et par conséquent qu'elle est nulle (puisque par hypothèse $\lambda^n$ est différent de la valeur propre). Obtenons tout d'abord la représentation nécessaire pour l'intégrale:

$$\lambda \int_a^b K(x, y)\,S_n(y)\,dy = \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi_0(y)\,dy +$$

$$+ \ldots + \lambda^n \int_a^b K(x, y)\,\varphi_{n-1}(y)\,dy = S_{n+1}(x) - \varphi_0(x) =$$

$$= S_n(x) + \lambda^n \int_a^b K(x, y)\,F(y)\,dy - F(x). \qquad (1.43)$$

Transformons ensuite (1.42) portant dans le terme d'intégration l'égalité (1.41) compte tenu de (1.43). Faisons les transformations nécessaires :

$$\omega(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\,\varphi(y)\,dy - F(x) =$$

$$= \varphi(x) - F(x) - \lambda \int_a^b K(x, y) \left\{\lambda^n \int_a^b K_n(y, t)\,\varphi(t)\,dt + S_n(y)\right\} dy =$$

$$= \varphi(x) - S_n(x) - \lambda^n \int_a^b K_n(x, y)\,F(y)\,dy -$$

$$-\lambda^{n+1}\int_a^b \varphi(t)\int_a^b K_n(y, t)\,K(x, y)\,dy\,dt =$$

$$=\lambda^n\int_a^b K_n(x, y)\,\varphi(y)\,dy - \lambda^n\int_a^b K_n(x, y)\,F(y)\,dy -$$

$$-\lambda^{n+1}\int_a^b \varphi(t)\int_a^b K_n(x, y)\,K(y, t)\,dy\,dt =$$

$$=\lambda^n\int_a^b K_n(x, y)\left\{\varphi(y) - F(y) - \lambda\int_a^b K(y, t)\,\varphi(t)\,dt\right\}dy =$$

$$=\lambda^n\int_a^b K_n(x, y)\,\omega(y)\,dy. \qquad (1.44)$$

Dans la dernière égalité il est tenu compte de la relation découlant de (1.10), soit

$$\int_a^b K_m(x, y)\,K_n(y, t)\,dy = \int_a^b K_m(y, t)\,K_n(x, y)\,dy.$$

Etablissons le lien existant entre les résolvantes des équations (1.1) et (1.41). Soit $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$ la résolvante du noyau itéré $K_n(x, y)$:

$$\Gamma_n(x, y, \lambda^n) = K_n(x, y) + \lambda K_{2n}(x, y) + \\ + \ldots + \lambda^{p-1}K_{pn}(x, y) + \ldots \qquad (1.45)$$

Il est évident que cette fonction se laisse exprimer à l'aide de $\Gamma(x, y, \lambda)$. Pour nous est d'un grand intérêt au contraire la représentation de la résolvante $\Gamma(x, y, \lambda)$ à l'aide de $\Gamma_n(x, y, \lambda^n)$. On a l'égalité évidente

$$\int_a^b K_i(x, t)\,\Gamma_n(t, y, \lambda^n)\,dt = K_{n+i}(x, y) + \lambda K_{2n+i}(x, y) + \ldots \qquad (1.46)$$

Regroupant les termes dans la formule (1.12) on obtient

$$\Gamma(x, y, \lambda) = K(x, y) + \lambda K_2(x, y) + \ldots + \lambda^{n-2}K_{n-1}(x, y) +$$

$$+\lambda^{n-1}\Gamma_n(x, y, \lambda^n) + \lambda^n\int_a^b K(x, t)\,\Gamma_n(t, y, \lambda^n)\,dt +$$

$$+\ldots + \lambda^{2n-2}\int_a^b K_{n-1}(x, t)\,\Gamma_n(t, y, \lambda^n)\,dt.$$

Il découle de cette égalité que dans un voisinage suffisamment petit de $\lambda$ la représentation de la résolvante est une série convergente. Il découle alors du fait que la résolvante est méromorphe qu'elle existe partout à l'exclusion des zéros du déterminant de Fredholm.

La théorie énoncée plus haut s'étend aussi au cas des noyaux de la forme

$$K(x, y)=\frac{H(x, y)}{(x-c)^{\alpha}},$$

où la fonction $H(x, y)$ est bornée et $\alpha < 1$. A la différence du cas étudié ci-dessus il est impossible d'obtenir un noyau borné par un nombre fini d'itérations.

Considérons la suite des fonctions $H^{(n)}(x, y)$ obtenues par la formule de récurrence:

$$H^{(n)}(x, y)=\int_a^b \frac{H(x, t)\, H^{(n-1)}(t, y)}{|t-c|^{\alpha}}\, dt \quad (n=1, 2, \ldots),$$

$$H^{1}(x, y)=H(x, y).$$

On montre aisément que l'inégalité $|H^{(n)}|<M^{h}h^{n-1}$ est vérifiée, où $h=\frac{(c-a)^{1-\alpha}+(b-c)^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ et $M=\max|H(x, y)|$.

Définissons la fonction $\Gamma(x, y, \lambda)$ au moyen de l'expression

$$\Gamma(x, y, \lambda)=\frac{1}{|x-c|^{\alpha}}\{H(x, y)+\lambda H^{(2)}(x, y)+\ldots\}. \qquad (1.47)$$

Le numérateur du second membre converge uniformément pour un $\lambda$ suffisamment petit ($|\lambda|<1/(Mh)$). On vérifie par substitution directe que la fonction définie conformément à (1.47) vérifie les équations (1.12) et (1.13), donc est résolvante.

Les résultats énoncés sont obtenus par étude directe de l'équation intégrale. Cependant il est parfois plus rationnel pour l'examen des propriétés de la résolvante d'avoir recours aux équations différentielles initiales (si l'équation intégrale est apparue au cours de la résolution du problème aux limites). Pareille combinaison a permis par exemple une analyse exhaustive des équations intégrales de la théorie du potentiel (cf. N. Gunter [1]). Plus loin aux §§ 29, 31 c'est justement de cette façon qu'on étudie les équations intégrales du problème spatial de la théorie de l'élasticité.

## § 2. Intégrale de type Cauchy

Désignons par $L$ un contour fermé différentiable pris sur le plan de la variable complexe $z$. Le domaine intérieur limité par le contour $L$ sera désigné par $D^{+}$, le domaine extérieur par $D^{-}$. Soit $f(\tau)$ la

valeur limite sur le contour $L$ d'une fonction analytique à l'intérieur ou à l'extérieur du contour. On supposera tout d'abord que la fonction $f(\tau)$ est continue. Il découle alors du théorème de Cauchy que l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \qquad (2.1)$$

appelée *intégrale de Cauchy*, sera dans le premier cas égale à la fonction analytique spécifiée quand $z \in D^+$ et s'annulera quand $z \in D^-$, $z \notin L$. Dans le second cas l'intégrale de Cauchy est nulle quand $z \in D^+$ et redonnera la valeur de la fonction avec un signe inverse quand $z \in D^-$ (si dans l'infini elle s'annule) *).

Abandonnons maintenant l'hypothèse suivant laquelle la fonction continue (la densité de l'intégrale) est la valeur limite (de l'intérieur ou de l'extérieur) d'une fonction analytique. Dans ce cas l'intégrale (2.1) est analogue à celle de Cauchy; nous dirons que c'est une *intégrale de type Cauchy*. Montrons que l'intégrale de type Cauchy représente certaines fonctions analytiques dans les domaines $D^+$ et $D^-$ qu'on note respectivement $\Phi^+(z)$ et $\Phi^-(z)$. Les fonctions ainsi construites peuvent être considérées comme une seule fonction analytique par tranches $\Phi(z)$.

Formons la différence $\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)$, les points $z+\Delta z$ et $z$ appartenant simultanément à $D^+$ ou $D^-$. Considérons la différence

$$\frac{\Phi(z+\Delta z)-\Phi(z)}{\Delta z} \int_L \frac{f(\tau)}{(\tau-z)^2}\,d\tau =$$

$$= \int_L \left[\left(\frac{1}{\tau - z - \Delta z} - \frac{1}{\tau - z}\right)\cdot\frac{f(\tau)}{\Delta z} - \frac{f(\tau)}{(\tau-z)^2}\right] d\tau.$$

Le noyau $\frac{1}{\tau - z}$ étant analytique par rapport à $z$ (quand $z \notin L$), l'expression dans le crochet peut être rendue aussi petite que l'on veut pour un $\Delta z$ suffisamment petit. Passant à la limite on se convainc de l'existence de la limite de $\Phi(z+\Delta z) - \Phi(z)/\Delta z$ égale à la dérivée de la fonction $\Phi(z)$. De la différentiabilité de la fonction de variable complexe découle, comme on le sait, son analyticité.

On peut faire l'étude des intégrales de type Cauchy tout en supposant les fonctions $f(\tau)$ appartenir à telles ou autres classes. Limitons-nous au cas où la densité des intégrales de type Cauchy appartient à la classe de Hölder-Lipschitz **). Leur module de continuité $\omega(\delta)$

*) Le parcours est effectué partout dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

**) Classe H-L dans ce qui suit.

est une fonction exponentielle

$$\omega(\delta) = \sup | f(\tau_2) - f(\tau_1) | \leqslant A \, | \tau_2 - \tau_1 |^{\lambda},$$
$$\delta = | \tau_2 - \tau_1 | \quad (A > 0, \quad 0 < \lambda \leqslant 1).$$

La possibilité d'élaborer dans ce cas une théorie mathématique exhaustive, ainsi que de décrire toute une série de problèmes d'application de physique mathématique est la raison du choix d'une telle classe de fonctions. Il est évident que la somme, le produit et le rapport (si le dénominateur est différent de zéro) de deux fonctions de classe H-L d'exposants $\lambda_1$, $\lambda_2$ respectivement appartiennent également à la classe H-L d'exposant $\lambda = \min | \lambda_1, \lambda_2 |$. Remarquons que les fonctions différentiables sont de classe H-L avec $\lambda = 1$. L'appartenance d'une fonction à la classe H-L est une propriété locale. Elle peut être vérifiée dans le voisinage d'un point du contour et ne pas l'être dans le voisinage d'un autre point. Nous ne considérerons dans ce qui suit que les fonctions qui sur tout le contour appartiennent à la classe H-L. Nous mentionnerons spécialement les cas où cette condition n'est pas remplie en quelques points du contour. Le fait qu'une fonction $\varphi(\tau)$ appartient à la classe H-L sera noté de la manière suivante: $\varphi(\tau) \in H(A, \lambda)$ ou $\varphi(\tau) \in H$.

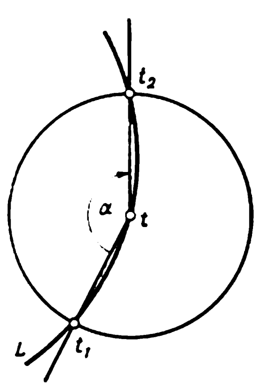


Fig. 1. Disposition des points sur le contour d'intégration.

Lors de la définition de l'intégrale de type Cauchy nous avons admis que le point $z \notin L$. Considérons à présent l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \quad (t \in L). \tag{2.2}$$

L'intégrale (2.2) n'existe pas dans le sens commun (en tant qu'intégrale impropre) puisque la singularité de l'expression sous le signe somme vaut l'unité.

Définissons l'intégrale (2.2) de la manière suivante. Du point $t$ comme centre menons un cercle de rayon suffisamment petit $\delta$. Le choix de $\delta$ est dicté par la condition impliquant que le cercle de rayon arbitraire $\rho < \delta$ de centre au point $t$ ait avec le contour $L$ seulement deux points d'intersection. Désignons par $t_1$ et $t_2$ les points d'intersection du cercle de rayon $\delta$ avec la courbe $L$ (dans le sens de parcours contraire au sens des aiguilles d'une montre) et par $L_\delta$ le petit arc réunissant les points $t_1$ et $t_2$ (fig. 1). Dans l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L - L_\delta} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} \, d\tau \tag{2.3}$$

l'expression sous le signe somme est bornée, de sorte que l'intégrale existe pour toute valeur $\delta$ ($\delta \neq 0$). Si on passe à la limite en faisant tendre $\delta$ vers zéro, la limite ainsi obtenue est appelée *valeur singulière de l'intégrale de type Cauchy* ou *valeur principale au sens de Cauchy*. Remarquons que la différence entre la valeur singulière de l'intégrale et la valeur impropre réside dans le fait que dans le premier cas le rapport de la longueur des arcs $(t_2, t)$ et $(t_1, t)$ n'est pas arbitraire, mais doit tendre à la limite vers un.

Considérons l'intégrale singulière la plus simple ($\varphi(\tau) = 1$):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \lim_{\delta\to 0}\int_{L-L_\delta} \frac{d\tau}{\tau - t} = \lim_{\delta\to 0}\left[\ln(t_2 - t) - \ln(t_1 - t)\right].$$

Faisant tendre $\delta$ vers zéro tout en tenant compte de ce que le contour $L$ est différentiable, nous obtenons en définitive pour l'intégrale singulière considérée

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{1}{2}. \qquad (2.4)$$

Passons au cas général. Représentons l'intégrale singulière (2.2) sous la forme

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{\varphi(t)}{2}. \qquad (2.5)$$

La première intégrale est impropre car $\varphi(t) \in H(A, \lambda)$, la seconde, elle, a été considérée ci-dessus.

Considérons maintenant les valeurs limites des fonctions $\Phi^+(z)$ et $\Phi^-(z)$ quand les points $z$ tendent vers les points $t$ du contour $L$ (respectivement de l'intérieur et de l'extérieur), et désignons ces valeurs limites par $\Phi^\pm(t)$. Fixons sur le contour $L$ un point $t$ et considérons l'intégrale

$$\psi_t(z) = \int_L \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - z}\,d\tau. \qquad (2.6)$$

Examinons cette fonction aux points $z$ situés sur la droite coupant le contour $L$ au point $t$. Démontrons l'existence des valeurs limites $\psi_t^+(t)$ et $\psi_t^-(t)$ et de la valeur directe $\psi_t(t)$. Formons la différence:

$$\psi_t(z) - \psi_t(t) = \int_L (z - t)\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{(\tau - z)(\tau - t)}\,d\tau.$$

Partageons le contour $L$ en deux parties $L - L_\delta$ et $L_\delta$ (l'arc $L_\delta$ est défini comme précédemment) et conformément à cela mettons l'intégrale sous la forme de la somme de deux intégrales: $I_1$ étendue à l'arc $L_\delta$ et $I_2$ étendue à l'arc $L - L_\delta$. Pour simplifier la démonstration limitons-nous au cas où les points $z$ tendent vers la limite

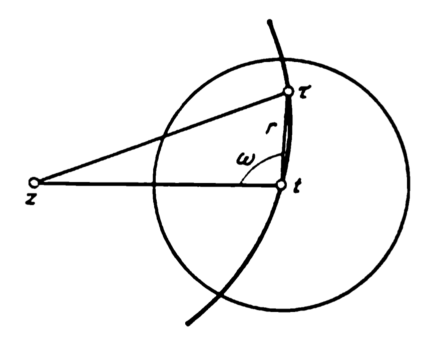



Fig. 2. Disposition des points dans le plan et sur le contour d'intégration.

suivant un chemin différent de la tangente. Dans ce cas l'angle $\omega$ (fig. 2) est toujours plus grand qu'un certain angle $\omega_0 > 0$ et l'inégalité suivante est évidente

$$\left|\frac{z-t}{\tau-z}\right| \leqslant \frac{1}{\sin\omega_0} = K.$$

De la condition H-L découle l'estimation

$$\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right| < Ar^{\lambda-1}, \quad r = |\tau - t|.$$

Le contour $L$ étant différentiable, il existe une certaine constante $m$ supérieure à $\left|\frac{d\tau}{dt}\right|$. Utilisons les inégalités rapportées plus haut pour estimer l'intégrale $I_1$:

$$|I_1| \leqslant \int_{L_\delta} \frac{|z-t|}{|\tau-z|}\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau-t}\right||d\tau| <$$

$$< KAm \int_{L_\delta} r^{\lambda-1}|dr| = 2KAm \int_0^\delta r^{\lambda-1}\,dr = \frac{2KAm\delta^\lambda}{\lambda}.$$

Fixant une valeur suffisamment petite de $\delta$, on peut obtenir que l'intégrale $I_1$ soit inférieure à n'importe quel nombre $\varepsilon$ donné d'avance. Pour estimer $I_2$ nous choisissons $z$ suffisamment proche du point $t$ de sorte que $|I_2|$ soit inférieure à $\varepsilon$, ce qui est possible grâce à la

continuité de l'expression sous le signe somme. On a alors l'estimation

$$|I_1| + |I_2| < 2\varepsilon,$$

d'où découle la continuité de la fonction $\psi_t(z)$.

On considère ainsi que les égalités

$$\lim_{z\to t,\, z\in D^+} \psi_t^+(z) = \lim_{z\to t,\, z\in D^-} \psi_t^-(z) = \psi_t(t) \tag{2.7}$$

sont démontrées. Ici $\psi_t(t)$ est la valeur de l'intégrale (2.6) elle-même lorsque $z = t$. Comme pour l'intégrale nous avons

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} = \begin{cases} 1, & z\in D^+, \\ 0, & z\in D^-, \end{cases}$$

et que conformément à (2.4) sa valeur singulière est égale à 1/2, il découle de l'égalité (2.7) que

$$\Phi^+(t) - \varphi(t) = \Phi^-(t) = \psi_t(t) = \Phi(t) - \frac{1}{2}\varphi(t). \tag{2.8}$$

Eliminant de ces égalités la fonction auxiliaire continue $\psi(t)$ nous obtenons les formules de Sokhotski-Plemelj, dont le rôle est primordial pour ce qui suit:

$$\begin{aligned} \Phi^+(t) &= \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \\ \Phi^-(t) &= -\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \end{aligned} \tag{2.9}$$

ou sous une autre forme

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t), \qquad \Phi(t) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t) + \Phi^-(t)]. \tag{2.9'}$$

De ces formules découle directement que les valeurs limites des $\Phi^\pm(t)$ seront des fonctions continues. Il s'avère toutefois que ces fonctions sont de classe H-L d'exposant $\lambda$, si $\lambda < 1$, ou d'exposant $1 - \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) si $\lambda$ est égal à 1. Ce résultat s'appelle *théorème de Plemelj-Privalov.*

Il est évident qu'il suffit de démontrer ce théorème pour la fonction (2.6) seulement. Estimons la différence pour deux points suffisamment proches $t_1$ et $t_2$:

$$\psi_{t_2}(t_2) - \psi_{t_1}(t_1) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \left\{\frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_2)}{\tau - t_2} - \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t_1)}{\tau - t_1}\right\} d\tau. \tag{2.10}$$

Comme le contour $L$ est supposé continûment différentiable, nous avons l'estimation $s(t_1, t_2) \leqslant m\,|t_2 - t_1|$, où $s(t_1, t_2)$ est la longueur du petit arc de contour compris entre les points $t_1$ et $t_2$. Isolons

sur le contour $L$ un arc $L_1$ en portant des deux côtés du point $t_1$ des arcs de longueur $2s(t_1, t_2)$. On a alors

$$\psi_{t_2}(t_2)-\psi_{t_1}(t_1)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\,d\tau-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_1)}{\tau-t_1}\,d\tau+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_1}\frac{\varphi(t_1)-\varphi(t_2)}{\tau-t_1}\,d\tau+\frac{1}{2\pi i}\int_{L-L_1}\frac{[\varphi(\tau)-\varphi(t_2)](t_2-t_1)}{(\tau-t_1)(\tau-t_2)}\,d\tau=$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4.$$

Estimons l'intégrale $I_1$:

$$|I_1|<\frac{1}{2\pi}\int_{L_1}\left|\frac{\varphi(\tau)-\varphi(t_2)}{\tau-t_2}\right||d\tau|\leqslant C_1\int_{L_1}\frac{|d\tau|}{|\tau-t_2|^{1-\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant C_2\int_0^{c|t_2-t_1|}\frac{ds}{s^{1-\lambda}}\leqslant C_3 s^{\lambda}(t_1, t_2)\leqslant A_1|t_2-t_1|^{\lambda}.$$

La signification des constantes introduites est évidente. On construit de façon analogue l'estimation de l'intégrale $I_2$. Estimons l'intégrale $I_3$:

$$|I_3|\leqslant\frac{A|t_2-t_1|^{\lambda}}{2\pi}\left|\int_{L-L_1}\frac{d\tau}{\tau-t_1}\right|.$$

La dernière intégrale étant bornée, nous sommes conduits à l'estimation voulue

$$|I_3|\leqslant A_3|t_2-t_1|^{\lambda}.$$

Formons pour l'intégrale $I_4$ la suite d'inégalités:

$$|I_4|\leqslant A\frac{|t_2-t_1|}{2\pi}\int_{L-L_1}\frac{ds}{|\tau-t_1|\,|\tau-t_2|^{1-\lambda}}\leqslant$$

$$\leqslant A'|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s(t_1,\tau)\cdot s^{1-\lambda}(t_2,\tau)}=$$

$$=A'|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s^{2-\lambda}(t_1,\tau)\left[\dfrac{s(t_2,\tau)}{s(t_1,\tau)}\right]^{1-\lambda}}.$$

On a par construction de l'arc $L_1$ $s(t_2,\tau)/s(t_1,\tau)\geqslant 1/2$, de sorte que

$$|I_4|\leqslant A''|t_2-t_1|\int_{L-L_1}\frac{ds}{s^{2-\lambda}(t_1,\tau)}.$$

Ainsi, quand $\lambda < 1$ on a $|I_4| \leqslant A_4 |t_2 - t_1|^\lambda$. Mais si $\lambda = 1$, on a $|I_4| \leqslant A'_1 |t_2 - t_1| \cdot |\ln|t_2 - t_1||$. Cette inégalité peut être affaiblie*) $|I_4| \leqslant A'_4 |t_2 - t_1|^{1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$.

De toutes ces estimations obtenues précédemment découle le théorème de Plemelj-Privalov.

Considérons maintenant le cas d'une intégrale de type Cauchy prise sur une courbe illimitée. Choisissons en qualité d'exemple la droite réelle. Exigeons qu'en tous les points intérieurs la densité $\varphi(t) \in H(A, \lambda)$ et qu'à l'infini soit remplie la condition

$$|\varphi(t) - \varphi(\infty)| < \frac{A}{|\tau|^\mu} \quad (\mu > 0). \tag{2.11}$$

Si $\varphi(\infty) \neq 0$, la question de l'existence de l'intégrale de type Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{2.12}$$

se pose puisque, les limites d'intégration étant illimitées, celle-ci n'existe pas en tant qu'intégrale impropre. Convenons d'appeler intégrale (2.12) la limite suivante:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{-N}^{N} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z} d\tau.$$

Indiquons une représentation régulière de l'intégrale (2.12):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau - z} d\tau \pm \frac{1}{2} \varphi(\infty),$$

où le signe « + » est pris quand $\operatorname{Im} z > 0$, le signe « — » quand $\operatorname{Im} z < 0$.

Les résultats que nous avons énoncés plus haut se rapportant aux intégrales de type Cauchy et aux intégrales singulières pour des contours fermés peuvent être entièrement transposés au cas des contours illimités pour les contraintes indiquées plus haut.

Arrêtons-nous encore sur le problème de l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles; considérons d'abord le cas où l'une des intégrales est ordinaire:

$$I(z) = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau} d\tau_1. \tag{2.13}$$

*) Pour obtenir l'estimation dans la classe de fonctions vérifiant la condition H-L.

Supposons que la fonction $\varphi(\tau, \tau_1) \in H(A, \lambda)$ pour chacune des variables et la fonction $\omega(\tau, z)$ est intégrable en $\tau$ pour les valeurs de $z$ appartenant à un certain ensemble. Considérons l'intégrale $I_1(z)$ obtenue de (2.13) par intervertissement de l'ordre d'intégration:

$$I_1(z) = \int_L d\tau_1 \int_L \frac{\omega(\tau, z)\,\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau. \tag{2.14}$$

Pour concrétiser nous définirons la position des points $\tau$ et $\tau_1$ par des abscisses curvilignes $s$ et $s_1$ comptées à partir d'un certain point fixe (fig. 3). Découpons dans le domaine d'intégration (carré de côté $l$) une bande de largeur $\delta$ dont la ligne médiane coïncide avec la diagonale. Désignons cette bande par $L_\delta$.

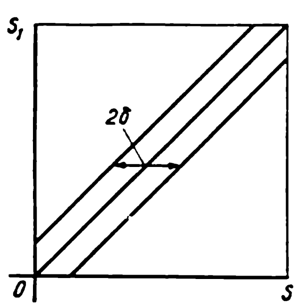


Fig. 3. Domaine d'intégration de l'intégrale double.

Représentons chacune des intégrales (2.13) et (2.14) sous la forme

$$I = I_0 + I_\delta, \quad I_1 = I_{10} + I_{1\delta},$$

où $I_0 = I_{10}$; l'intervertissement de l'ordre d'intégration étant possible dans les intégrales régulières, l'indice « $\delta$ » indique que le domaine d'intégration est le domaine $L_\delta$, l'indice « 0 », la partie restante. Nous avons ensuite

$$I_\delta = \int_L \omega(\tau, z)\, d\tau \int_{l_{\delta(\tau)}} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1,$$

et la signification de la notation $l_{\delta(\tau)}$ est évidente. Considérons la deuxième intégrale

$$\int_{l_{\delta(\tau)}} \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1 = \int_{l_{\delta(\tau)}} \frac{\varphi(\tau, \tau_1) - \varphi(\tau, \tau)}{\tau_1 - \tau}\, d\tau_1 + \varphi(\tau, \tau) \int_{l_{\delta(\tau)}} \frac{d\tau_1}{\tau_1 - \tau}.$$

Comme la première intégrale est impropre, elle peut être rendue aussi petite que l'on veut pour un $\delta$ suffisamment petit. La seconde intégrale, elle, tend vers zéro puisque le contour est continûment différentiable. De l'intégrabilité de la fonction $\omega(\tau, z)$ découle l'estimation $|I_\delta| < \varepsilon$, où $\varepsilon$ est un petit nombre quelconque. Une estimation analogue est obtenue pour l'intégrale $I_{1\delta}$. Le module de la différence

$$|I - I_1| = |I_\delta - I_{1\delta}| < |I_\delta| + |I_{1\delta}|$$

pouvant être rendu aussi petit que l'on veut, nous sommes conduits à l'égalité

$$I = I_1. \tag{2.15}$$

Passons maintenant au cas où les deux intégrales sont singulières :

$$I(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1,$$

$$I_1(t)=\frac{1}{\pi i}\int_L d\tau_1\,\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau.$$

Portons notre attention sur le fait que les deux intégrales ont un sens. Pour s'en convaincre introduisons la fonction auxiliaire

$$\chi(\tau)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1.$$

En vertu du théorème de Plemelj-Privalov *) cette fonction est de classe H-L, donc l'intégrale de type Cauchy prise sur celle-ci existe. Transformons ensuite dans la seconde intégrale l'expression sous le signe somme :

$$\frac{1}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}=\frac{1}{\tau_1-t}\left[\frac{1}{\tau-t}-\frac{1}{\tau-\tau_1}\right]$$

et introduisons la fonction auxiliare

$$\omega(\zeta,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\zeta}\,d\tau.$$

A l'aide de cette fonction l'intégrale $I_1(t)$ se représente sous la forme d'une intégrale impropre.

Etendons les intégrales $I(t)$ et $I_1(t)$ au plan de la variable $z$ (en remplaçant $t$ par $z$). Notons ces intégrales respectivement $I(z)$ et $I_1(z)$. Il découle alors de la démonstration précédente que $I(z) = I_1(z)$. Les égalités suivantes sont évidentes :

$$I^+(t)=I_1^+(t),\qquad I^-(t)=I_1^-(t).$$

Appliquant la formule de Sokhotski-Plemelj nous obtenons

$$I(t)=\frac{1}{2}\left[I_1^+(t)+I_1^-(t)\right].$$

Formons la fonction auxiliaire

$$\psi(z,\tau_1)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-z}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau.$$

Moyennant celle-ci, on a

$$I_1(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(z,\tau_1)}{\tau_1-z}\,d\tau_1.$$

*) Supposant que la fonction $\varphi$ dépend de deux arguments.

Déterminons maintenant les valeurs limites $I_1^+(t)$ et $I_1^-(t)$ en tenant compte du fait que la valeur limite de la densité $\psi(z, \tau_1)$ est différente des différents côtés du contour; leur somme nous donne

$$\frac{1}{2}[I_1^+(t)+I_1^-(t)]=\frac{1}{2}[\psi^+(t, t)-\psi^-(t, t)]+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^+(t, \tau_1)+\psi^-(t, \tau_1)}{\tau_1-t}\,d\tau_1.$$

Transformons le second membre de cette expression compte tenu des formules de Sokhotski-Plemelj:

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t, t)-\psi^-(t, t)]=\varphi(t, t),$$

$$\frac{1}{2}[\psi^+(t, \tau_1)+\psi^-(t, \tau_1)]=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau-t}\,d\tau-\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau-\tau_1}\,d\tau= \\ =\frac{t-\tau_1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau-\tau_1)}\,d\tau.$$

De la sorte nous parvenons à la formule recherchée, la formule de Poincaré-Bertrand:

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau_1=-\pi^2\varphi(t, t)+\int_L d\tau_1\int_L \frac{\varphi(\tau, \tau_1)}{(\tau-t)(\tau_1-\tau)}\,d\tau. \tag{2.16}$$

Etudions le cas particulier où la densité $\varphi$ n'est fonction que d'un seul argument $\tau_1$. On peut montrer que l'intégrale du second membre de la formule (2.16) s'annule, et

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1-\tau}\,d\tau=-\pi^2\varphi(t). \tag{2.16'}$$

Passons maintenant à l'examen de l'intégrale de type Cauchy pour un contour non fermé. Soit $L$ un contour continûment différentiable non fermé avec ses extrémités aux points $a$ et $b$. Fixons le sens de parcours du point $a$ au point $b$ par exemple et considérons l'intégrale

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \tag{2.17}$$

La fonction $\varphi(\tau)$ est de classe $H(A, \lambda)$ en tous les points du contour $L$, y compris les extrémités. Nous appellerons intégrale de Cauchy l'intégrale (2.17) aussi. Cette intégrale, à la différence de l'intégrale (2.2), n'est pas une fonction analytique par tranches, mais une fonction analytique sur tout le plan à l'exclusion du contour $L$. Par analogie à l'intégrale de type Cauchy pour le contour fermé, on

introduit dans ce cas également la notion de valeur singulière et les notions de valeurs limites à gauche et à droite ($\Phi^+(t)$ et $\Phi^-(t)$) par rapport au sens de l'intégration.

Puisque l'intégrale (2.17) n'est pas modifiée quand on complète le contour d'intégration d'une certaine manière jusqu'à obtenir un contour fermé sur lequel la fonction $\varphi(\tau)$ sera prise égale à zéro, il est alors évident que les résultats de caractère local que nous avons exposés plus haut sont valables également pour les points intérieurs au contour $L$. Etudions le comportement des intégrales de Cauchy au voisinage des extrémités. Transformant l'expression (2.17) nous obtenons

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}\,d\tau =$$
$$= \frac{\varphi(t)}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)-\varphi(t)}{\tau - z}\,d\tau. \qquad (2.18)$$

L'intégrale dans la dernière égalité existe en tant qu'intégrale impropre aussi bien lorsque les points $z$ tendent vers les points du contour $L$ (y compris les extrémités) que lorsqu'ils sont substitués aux points du contour. La singularité de la fonction $\Phi(z)$ n'est définie que pour le premier terme. En posant successivement $z = a$ et $z = b$, nous obtenons les représentations :

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= -\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln(z-a) + \Phi_1(z), \\ \Phi(z) &= \frac{\varphi(b)}{2\pi i}\ln(z-b) + \Phi_2(z). \end{aligned} \qquad (2.19)$$

$\Phi_1(z)$ et $\Phi_2(z)$ sont des fonctions analytiques, bornées au voisinage des extrémités correspondantes et tendant vers des limites définies quand le point $z$ tend vers $a$ ou $b$.

Le résultat obtenu répond immédiatement à la question du comportement de l'intégrale de type Cauchy au point où la densité admet une discontinuité de première espèce. Désignons ce point par $c$ et par $\varphi(c-0)$ et $\varphi(c+0)$ les valeurs limites correspondantes à gauche et à droite de la densité. Utilisant les résultats précédents on obtient

$$\Phi(z) = \frac{\varphi(c-0)-\varphi(c+0)}{2\pi i}\ln(z-c) + \Phi_0(z). \qquad (2.20)$$

Ici $\Phi_0(z)$ est une fonction analytique bornée au voisinage du point $c$ et tendant vers une limite quand $z$ tend vers le point $c$.

Considérons maintenant un cas plus complexe où la densité de l'intégrale de type Cauchy possède à l'une des extrémités du contour (par exemple au point $a$ pour fixer les idées) une singularité de

la forme

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-a)^\gamma}=\frac{\varphi^{**}(t)}{|t-a|^\alpha}. \tag{2.21}$$

Ici la fonction $\varphi^*(t)$ vérifie la condition H-L en tout point du contour, y compris le point $a$, $\varphi^{**}(t)$ est partout une fonction bornée, $\gamma=\alpha+i\beta$, $0\leqslant\alpha<1$. Nous entendrons par radical $(t-a)^{-\gamma}$ la valeur limite à gauche de n'importe quelle branche de la fonction $(z-a)^{-\gamma}$ dans le plan coupé suivant le contour $L$ du point $a$ au point $b$ et ensuite à l'infini suivant un arc quelconque ne coupant pas le contour $L$. La valeur limite à droite $[(z-a)^{-\gamma}]^-$ est alors égale à $(t-a)^{-\gamma}e^{-2\pi i\gamma}$. Montrons que dans le voisinage du point $a$ on a l'estimation :

$$|\Phi(z)|<\frac{C}{|z-a|^\gamma}\quad(\alpha<\gamma<1). \tag{2.22}$$

Commençons notre étude par le cas particulier où $\varphi(t)=1$. En vertu des formules de Sokhotski-Plemelj, valides comme on a mentionné plus haut en tous les points intérieurs au contour $L$, nous affirmons que

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=(t-a)^{-\gamma}\quad\left(\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{d\tau}{(\tau-a)^\gamma(\tau-z)}\right). \tag{2.23}$$

Introduisons la fonction auxiliaire

$$w(z)=\frac{(z-a)^\gamma}{1-e^{-2\pi i\gamma}}. \tag{2.24}$$

Cette fonction est univoque dans le plan coupé de la façon indiquée plus haut. Chacune de ses branches vérifie l'égalité

$$w^+(t)-w^-(t)=(t-a)^{-\gamma}. \tag{2.25}$$

Ce qu'on vient d'énoncer nous permet d'écrire la relation suivante :

$$[\Phi(z)-w(z)]^+=[\Phi(z)-w(z)]^- \tag{2.26}$$

qui est vérifiée en tout point du contour $L$ à l'exclusion du point $a$. D'autre part, étant donné l'estimation

$$|\Phi(z)-w(z)|<\frac{C}{|z-a|^\gamma}, \tag{2.27}$$

la singularité éventuelle au point $a$ peut $a$ être éliminée.

Des raisonnements précédents découlent les égalités

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+\Phi_0(z),\\ \Phi^+(t) &= \frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(t-a)^{-\gamma}+\Phi_0(t),\\ \Phi^-(t) &= \frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(t-a)^{-\gamma}+\Phi_0(t),\end{aligned} \tag{2.28}$$

où $\Phi_0(z)$ est une fonction analytique bornée dans le voisinage du point $a$. La valeur singulière, elle, se représente de la manière suivante:

$$\Phi(t)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t)+\Phi^-(t)]=\frac{\operatorname{cotg}\gamma\pi}{2i}(t-a)^{-\gamma}+\Phi_0(t). \tag{2.29}$$

Passons à la considération du cas général. Après des transformations non compliquées nous obtenons pour la fonction $\Phi(z)$ une expression sous forme de la somme de deux intégrales:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}=\\ &= \frac{1}{2\pi i}\varphi^*(a)\int_L \frac{d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{[\varphi^*(\tau)-\varphi^*(a)]}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}d\tau.\end{aligned} \tag{2.30}$$

La première intégrale a été examinée plus haut. On peut montrer que la deuxième intégrale est inférieure en module à la fonction $\frac{C}{|z-a|^{\alpha_0}}$ $(\alpha-\lambda<\alpha_0<\alpha)$, où $\lambda$ est l'indice de la classe H-L de la fonction $\varphi^*(t)$.

En définitive formulons les résultats de la manière suivante. Représentons dans le voisinage du point $a$ l'intégrale de type Cauchy sous la forme

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-z)}=\frac{\varphi^*(a)\,e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+\Phi_0(z). \tag{2.31}$$

Dans le cas où $\alpha=0$, la fonction $\Phi_0(z)$ est holomorphe dans le voisinage du point $a$ sur le plan coupé comme indiqué et tend vers la limite quand $z$ tend vers le point $a$. Dans le cas général où $\alpha>0$, on a l'estimation

$$|\Phi_0(z)|<\frac{C}{|z-a|^{\alpha_0}}\quad(\alpha-\lambda<\alpha_0<\alpha). \tag{2.32}$$

## § 3. Problème aux limites de Riemann

Soit comme auparavant $L$ un contour fermé continûment différentiable. Supposons définie sur ce contour une fonction $G(t)$ qui

est une fonction continue et ne s'annule pas. On appelle *indice* $\varkappa$ *de la fonction* $G(t)$ *sur le contour* $L$ l'accroissement de l'argument de la fonction $G(t)$, divisé par $2\pi$, le contour étant parcouru dans l'antihoraire:

$$\varkappa = \operatorname{Ind} G(t) = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\ln G(t)]. \tag{3.1}$$

L'indice peut être mis sous une forme intégrale évidente:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t). \tag{3.1'}$$

La fonction $G(t)$ étant continue, l'accroissement de son argument est nécessairement multiple de $2\pi$, de sorte que l'indice est toujours un nombre entier. Il découle de ces formules que l'indice du produit de deux fonctions est égal à la somme des indices des facteurs et l'indice du rapport de deux fonctions (sous la condition que le dénominateur ne s'annule pas), à la différence des indices du dividende et du diviseur.

Dans le cas où la fonction $G(t)$ est différentiable et représente la valeur limite, de l'intérieur ou de l'extérieur, d'une fonction analytique, on peut affirmer en vertu des égalités

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G'(t)}{G(t)}\,dt \tag{3.1''}$$

que l'indice est, en valeur absolue, égal au nombre de zéros de la fonction dont la valeur limite est la fonction $G(t)$ *). Ce nombre est positif si la fonction $G(t)$ est la valeur limite d'une fonction analytique intérieure du contour, et négatif dans le cas contraire.

Considérons les fonctions $G(t)$ et $g(t)$ ($G(t) \neq 0$), satisfaisant à la condition H-L et définies sur le contour fermé continûment différentiable $L$. Le *problème de Riemann* revient à chercher une fonction $\Phi(z)$ analytique par tranches (la ligne de discontinuité est le contour $L$) vérifiant la relation limite

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t). \tag{3.2}$$

La fonction $G(t)$ est dite *coefficient* et $g(t)$ *terme constant du problème de Riemann*. L'indice de la fonction $G(t)$ s'appelle *indice du problème* correspondant *de Riemann*. Si la fonction $g(t) = 0$, le problème de Riemann est dit *problème homogène de Riemann*.

Considérons le cas le plus simple où $G(t) = 1$. La solution du problème de Riemann se représente d'emblée par l'intégrale de type Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{\tau - z}\,d\tau, \tag{3.3}$$

*) Puisque la dernière intégrale est un résidu logarithmique (A. Markushevitch [1]).

et avec cela la démonstration peut être obtenue directement des formules de Sokhotski-Plemelj (2.9).

Considérons maintenant le problème homogène et supposons qu'il est résoluble, c'est-à-dire qu'il admet une solution non identiquement nulle. Désignons par $N^+$ la quantité de zéros de la fonction $\Phi^+(z)$ et par $N^-$ respectivement cette quantité pour $\Phi^-(z)$. Calculons l'indice des fonctions entrant dans la relation limite

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t). \tag{3.4}$$

On a

$$N^+ + N^- = \varkappa. \tag{3.5}$$

Comme le premier membre de (3.5) est non négatif, cette égalité permet de formuler immédiatement les conclusions suivantes sur la résolubilité du problème homogène de Riemann.

1. Pour que le problème homogène de Riemann soit résoluble il faut que l'indice $\varkappa$ soit non négatif.

2. Si $\varkappa > 0$, les fonctions $\Phi^+(z)$ et $\Phi^-(z)$ ont ensemble $\varkappa$ zéros.

3. Si $\varkappa = 0$, $\ln G(t)$ est une fonction univoque et les fonctions $\ln \Phi^+(z)$ et $\ln \Phi^-(z)$ sont analytiques respectivement dans $D^+$ et $D^-$. Prenant le logarithme de la condition aux limites (3.4) (tout en choisissant pour la fonction $\ln G(t)$ n'importe quelle branche) nous parvenons à la relation

$$\ln \Phi^+(t) = \ln \Phi^-(t) + \ln G(t) \tag{3.6}$$

qui est le problème non homogène de Riemann avec le coefficient $G_1(t) = 1$ pour la fonction $\ln \Phi(z)$. Sa solution peut être représentée à l'aide de la formule (3.3):

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z}\, d\tau = \Gamma(z).$$

La solution recherchée est

$$\Phi^+(z) = Ce^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = Ce^{\Gamma^-(z)}. \tag{3.7}$$

Ainsi, si l'on se tient rigoureusement aux contraintes introduites plus haut (analyticité de la fonction $\Phi(z)$ dans tout le domaine $D^-$, y compris l'infini), on obtient en vertu des formules (3.7) (sous la condition $\Gamma^-(\infty) = 0$) que la solution du problème homogène sera toujours égale à zéro, puisque la solution non triviale donnée par les formules (3.7) est égale à $C$ à l'infini.

Ces raisonnements permettent d'obtenir le résultat suivant. Soit $\varphi(t)$ une fonction de classe H-L définie sur un contour fermé et ne s'annulant pas sur ce contour (lorsque $\varkappa = 0$). On peut la représenter sous forme du rapport des fonctions qui sont les valeurs limites de fonctions, analytiques respectivement dans $D^+$ et $D^-$ (à l'exception

du point à l'infini) et ne s'annulant pas dans ces domaines. Ces fonctions se déterminent à l'aide des formules (3.7).

4. Pour $\varkappa > 0$ récrivons la condition aux limites (3.4) sous la forme:

$$\Phi^+(t) = t^{\varkappa}[t^{-\varkappa}G(t)]\,\Phi^-(t) = t^{\varkappa}G_1(t)\,\Phi^-(t).$$

Pour fixer les idées nous supposerons que le zéro appartient au domaine $D^+$. L'indice de la fonction $G_1(t)$ étant zéro, nous pouvons en vertu de ce qui a été dit plus haut la représenter sous forme du rapport:

$$G_1(t) = \frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[\tau^{-\varkappa}G(\tau)]}{\tau - z}\,d\tau,$$

ce qui nous permet d'écrire la condition aux limites sous la forme:

$$\frac{\Phi^+(t)}{e^{\Gamma^+(t)}} = t^{\varkappa}\frac{\Phi^-(t)}{e^{\Gamma^-(t)}}. \tag{3.8}$$

Dans le premier membre de l'égalité (3.8) se trouve la valeur limite d'une fonction analytique dans $D^+$, dans le second membre, celle d'une fonction analytique dans $D^-$ à l'exception du point à l'infini en lequel elle admet un pôle d'ordre non supérieur à $\varkappa$. En vertu du théorème généralisé de Liouville nous concluons que la solution générale du problème aux limites (3.8) peut être représentée par les formules suivantes:

$$\Phi^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}P_{\varkappa-1}(z), \quad \Phi^-(z) = e^{\Gamma^-(z)}z^{-\varkappa}P_{\varkappa-1}(z). \tag{3.9}$$

Ici $P_{\varkappa-1}(z)$ est un polynôme arbitraire de degré non supérieur à $\varkappa - 1$. La solution donnée par les formules (3.9) est dite *solution générale du problème homogène de Riemann.* Le polynôme $P(z)$ dans (3.9) doit être de degré $\varkappa$ si l'on suppose $\Phi^-(\infty) \neq 0$ *).

Ainsi, pour $\varkappa > 0$ le problème homogène de Riemann admet $\varkappa$ (ou respectivement $\varkappa + 1$) solutions linéairement indépendantes **):

$$\Phi_k^+(z) = z^k e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi_k^-(z) = z^{k-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}. \tag{3.9'}$$

Introduisons la notion de fonction canonique du problème de Riemann. Appelons *fonction canonique du problème de Riemann* la fonction analytique par tranches $X(z)$ représentée sous la forme

$$X^+(z) = e^{\Gamma^+(z)}, \quad X^-(z) = z^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)}.$$

*) On considérera par la suite que c'est toujours ainsi.

**) Au cours de la résolution des problèmes aux limites concrets, des considérations supplémentaires, liées au contenu physique du problème, permettent en général de déterminer univoquement le polynôme $P_{\varkappa}(z)$.

Pour $\varkappa \geqslant 0$ la fonction canonique est une solution particulière du problème homogène, dont la solution générale peut s'écrire de la façon suivante:

$$\Phi(z) = X(z)\, P_{\varkappa}(z).$$

Pour $\varkappa < 0$, la fonction canonique vérifiera aussi la relation limite (3.4) quoiqu'en admettant à l'infini un pôle d'ordre $-\varkappa$.

L'introduction de la fonction canonique permet d'étendre le résultat énoncé précédemment (page 50) à une fonction d'indice arbitraire. Il est possible de montrer que toute fonction de classe H-L et ne s'annulant pas sur le contour fermé peut être représentée sous la forme:

$$\varphi(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \tag{3.10}$$

Ici $X(z)$ est la fonction canonique du problème de Riemann $\Phi^+(t) = \varphi(t)\,\Phi^-(t)$.

Passons à la résolution du problème non homogène. Rappelons que dans ce cas le problème de Riemann revient à la construction d'une fonction analytique par tranches $\Phi(z)$ vérifiant la relation (3.2).

Soient $\varkappa$ l'indice de la fonction $G(t)$ et $X(z)$ la fonction canonique du problème posé (pour $g(t) = 0$). On a alors l'égalité

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \tag{3.11}$$

Représentons la relation limite (3.2) sous la forme:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{3.12}$$

Considérons le problème auxiliaire de Riemann:

$$\Psi^+(t) = \Psi^-(t) + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \tag{3.13}$$

dont la solution se représente par la formule

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{3.14}$$

Transformons la condition aux limites (3.12) en tenant compte de (3.14):

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t). \tag{3.15}$$

Dans le premier membre de l'égalité (3 15) figure la valeur limite d'une fonction analytique dans $D^+$, dans le second membre, celle

d'une fonction analytique dans $D^-$, sauf peut-être dans le point à l'infini. Dans le cas où $\varkappa < 0$, le rapport $\Phi^-(z)/X^-(z)$ s'annule à l'infini. Comme la fonction $\Psi^-(z)$ s'annule également à l'infini, nous concluons en vertu du théorème de Liouville que les expressions figurant dans les deux membres de l'égalité (3.15) sont identiquement nulles, d'où il découle que

$$\Phi(z) = X(z)\,\Psi(z). \tag{3.16}$$

Si, au contraire, $\varkappa \geqslant 0$, le rapport $\Phi^-(z)/X^-(z)$ représente la valeur limite d'une fonction analytique partout dans $D^-$ à l'exception du point à l'infini où elle admet un pôle d'ordre $\varkappa$. Aussi concluons-nous en vertu du théorème généralisé de Liouville que les expressions figurant dans les deux membres de l'égalité (3.15) sont identiquement égales à un certain polynôme de degré $\varkappa$. La solution dans ce cas prend la forme:

$$\Phi(z) = X(z)\,[\Psi(z) + P_\varkappa(z)]. \tag{3.17}$$

Les solutions (3.16) et (3.17) peuvent être représentées analytiquement par la seule expression (3.17) si l'on considère que le polynôme disparaît quand $\varkappa < 0$.

Une discussion complémentaire de la solution est nécessaire pour $\varkappa \leqslant 0$. La fonction $X(z)$ admet à l'infini un pôle d'ordre $-\varkappa$, et la fonction $\Psi(z)$, un zéro du premier ordre, en général. Aussi le produit $X(z)\,\Psi(z)$ (égal à la fonction $\Phi(z)$) aura-t-il à l'infini un pôle d'ordre $-\varkappa - 1$. Donc le problème non homogène de Riemann n'est pas résoluble pour $\varkappa + 1 < 0$. Il ne sera résoluble que si le terme constant satisfait certaines conditions assurant l'analyticité de la fonction $\Phi(z)$ au point à l'infini. Développons la fonction $\Psi(z)$ en série:

$$\Psi^-(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}, \quad c_k = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\tau^{k-1}\,d\tau.$$

Il est évident que la fonction $\Phi(z)$ sera analytique à l'infini si les coefficients $c_k = 0$ $(k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1)$.

La synthèse de l'exposé précédent nous conduit au théorème suivant. Le problème non homogène de Riemann (s'il est résoluble) a une solution représentée par la formule (3.17). Quand $\varkappa \geqslant 0$, le problème de Riemann a toujours une solution, et quand $\varkappa < 0$, la solution n'existe que si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,\tau^{k-1}\,d\tau = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1). \tag{3.18}$$

## § 4. Equations intégrales singulières

On appelle *équation intégrale singulière* l'équation intégrale de la forme

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{M(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (4.1)$$

Ici $L$ est un contour fermé continûment différentiable contenant, pour fixer les idées, le zéro comme point intérieur, et les fonctions $a(t)$, $M(t,\tau)$ et $f(t)$ sont de classe H-L ; la fonction $M(t,\tau)$ appartient à cette classe pour ces deux arguments. Introduisons les notations suivantes:

$$b(t) = M(t,t), \quad \frac{1}{\pi i}\,\frac{M(t,\tau) - M(t,t)}{\tau - t} = k(t,\tau).$$

Il est évident que la fonction $b(t)$ est aussi de classe H-L et qu'on a l'estimation

$$|k(t,\tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^{1-\lambda}} \quad (0 < \lambda \leqslant 1).$$

Récrivons l'équation (4.1) de la façon suivante:

$$K\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (4.1')$$

L'équation (4.1′) s'appelle *équation singulière complète*. L'équation est dite *homogène* si $f(t) = 0$. L'opérateur

$$K^0\varphi = a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

s'appelle partie *caractéristique* de l'équation singulière, l'opérateur

$$k\varphi = \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$$

sa *partie régulière*.

Avec les notations adoptées l'équation (4.1) deviendra

$$K\varphi = K^0\varphi + k\varphi = f. \qquad (4.1'')$$

On appelle équation *associée* (ou *transposée*), ou *adjointe* de l'équation (4.1) l'équation de la forme

$$K'\psi = a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)\,d\tau = 0. \qquad (4.2)$$

Il convient de noter que l'équation adjointe d'une équation caractéristique n'est pas en général toujours une équation caractéristique, car elle récèle un terme complémentaire régulier.

Soient $K\varphi$ un opérateur intégral singulier de la forme (4.1') et $K'\psi$ l'opérateur adjoint (4.2). Une substitution directe (grâce à la possibilité, démontrée au § 2, d'intervertir l'ordre d'intégration dans le cas où l'une des intégrales est régulière) permet de s'assurer que l'égalité

$$\int_L \psi K\varphi \, d\tau = \int_L \varphi K'\psi \, d\tau \tag{4.3}$$

est identiquement vérifiée.

Soient $K_1$ et $K_2$ des opérateurs singuliers de la forme (4.1') avec pour coefficients respectifs de leur partie caractéristique $a_1(t)$, $b_1(t)$ et $a_2(t)$, $b_2(t)$. On peut montrer à l'aide des formules de transposition de Poincaré-Bertrand (2.16') que la composition des opérateurs singuliers $K = K_1K_2$ représentera elle aussi un opérateur singulier avec pour coefficients de sa partie caractéristique

$$\begin{aligned} a(t) &= a_1(t)\, a_2(t) + b_1(t)\, b_2(t), \\ b(t) &= a_1(t)\, b_2(t) + a_2(t)\, b_1(t). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Il découle des formules (4.4) que la partie caractéristique de la composition des opérateurs singuliers ne dépend pas des parties régulières de chacun d'eux, mais seulement de leurs parties caractéristiques. Notons que la partie caractéristique de la composition des opérateurs singuliers ne dépend pas de l'ordre de celle-ci.

Une substitution directe permet de vérifier également l'égalité

$$(K_2K_1)' = K_1' \cdot K_2'. \tag{4.5}$$

Considérons l'équation singulière la plus simple, c'est-à-dire l'équation caractéristique

$$K^0\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f(t). \tag{4.6}$$

Introduisons la fonction analytique par tranches

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau.$$

En portant les expressions de $\varphi(t)$ et $\Phi(t)$ conformément à (2.9') dans l'équation (4.6) nous aboutissons au problème auxiliaire de Riemann

$$\begin{gathered} \Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t), \\ G(t) = \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}, \quad g(t) = \frac{f(t)}{a(t) + b(t)}. \end{gathered} \tag{4.7}$$

On appellera l'indice de ce problème indice de l'équation intégrale (4.6).

Nous considérerons maintenant seules les équations appelées équations normales, tout en supposant que l'inégalité $a(t) \pm b(t) \neq 0$ est vérifiée sur tout le contour $L$.

Nous obtenons en vertu de (2.9′) et (3.17) la solution du problème auxiliaire de Riemann d'où découle l'expression de la fonction recherchée:

$$\varphi(t) = a(t) f(t) - \frac{b(t) Z(t)}{\pi i} \int_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - t} + b(t) Z(t) P_{\varkappa-1}(t), \quad (4.8)$$

$$Z(t) = [a(t) + b(t)] X^+(t) = [a(t) - b(t)] X^-(t) = \frac{e^{\Gamma(t)}}{t^{\varkappa/2}},$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln\left[\tau^{-\varkappa} \frac{a(\tau) - b(\tau)}{a(\tau) + b(\tau)}\right]}{\tau - t} d\tau.$$

Ainsi, la réponse à la question de l'existence de la solution de l'équation intégrale caractéristique singulière et sa construction découlent du problème correspondant de Riemann.

Passons à la résolution de l'équation adjointe de l'équation caractéristique:

$$K^{0\prime}\psi = a(t)\, \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0. \quad (4.9)$$

A l'aide de la substitution $\omega(t) = b(t)\psi(t)$ nous la transformons en équation caractéristique par rapport à la fonction auxiliaire $\omega(t)$:

$$a(t)\,\omega(t) - \frac{b(t)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - t} d\tau = 0,$$

et au moyen de la fonction analytique par tranches

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(\tau)}{\tau - z} d\tau$$

nous passons au problème auxiliaire de Riemann. Son indice $\varkappa'$ s'avère égal à l'indice $\varkappa$ du problème initial avec le signe contraire, puisque le coefficient du problème de Riemann pour la fonction $\Omega(z)$ est égal à $\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}$. La comparaison des solutions du problème de Riemann pour l'équation initiale (caractéristique) et son adjointe permet de formuler des propositions concrètes sur leur résolubilité sous la forme adoptée en théorie des équations intégrales de Fredholm.

L'équation caractéristique singulière homogène et son adjointe ne sont jamais simultanément résolubles, elles sont soit toutes les deux non résolubles ($\varkappa = 0$), soit des deux est résoluble celle dont l'indice est positif. La différence du nombre de leurs solutions linéairement indépendantes est égale à $|\varkappa|$.

L'équation caractéristique non homogène (4.6) est toujours résoluble pour tout second membre si $\varkappa \geqslant 0$.Si, au contraire, $\varkappa < 0$, le problème auxiliaire de Riemann ne peut être résolu que lorsque les conditions (3.18) sont vérifiées. On peut montrer que ces conditions peuvent être mises sous la forme

$$\int_L \psi_i(t) f(t)\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, -\varkappa).$$

Ici $\psi_i(t)$ est le système complet de fonctions propres de l'équation adjointe homogène.

Considérons le problème de la régularisation des opérateurs singuliers. Soient $K_1$ et $K_2$ des opérateurs singuliers de la forme (4.1'). Si l'opérateur $K_2$ est tel que la composition $K_2K_1$ représente un opérateur régulier (autrement dit elle ne contient pas d'intégrale singulière), l'opérateur $K_2$ est dit *opérateur de régularisation* de l'opérateur $K_1$. Il est évident que si l'opérateur $K_2$ est l'opérateur de régularisation de l'opérateur $K_1$, l'opérateur $K_1$ représentera à son tour l'opérateur de régularisation de l'opérateur $K_2$. D'après les formules (4.4) la partie caractéristique de l'opérateur de régularisation sera de la forme

$$K_2^0\varphi = a(t)\,\varphi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau,$$

où $a(t)$ et $b(t)$ sont les coefficients de la partie caractéristique de l'opérateur régularisé $K_1\varphi$. On désignera l'opérateur de régularisation par $\widetilde{K}$.

Considérons une équation de la forme (4.1″) $K\varphi = f$. Appliquant aux deux membres de l'équation l'opérateur $\widetilde{K}$, nous obtenons l'équation régulière

$$\widetilde{K}K\varphi = \widetilde{K}f. \tag{4.10}$$

Ainsi, la fonction $\varphi(t)$ vérifie aussi bien l'équation singulière que l'équation régulière. La procédure que nous avons rapportée est appelée *régularisation à gauche.*

Si à la place de la fonction cherchée $\varphi(t)$ on introduit dans l'équation (4.1″) la fonction auxiliaire $\omega(t)$ tirée de la relation $\varphi(t) = \widetilde{K}\omega$, on aboutit de même à une équation régulière:

$$K\widetilde{K}\omega = f. \tag{4.11}$$

On obtient dans ce cas au lieu d'une équation singulière pour la fonction cherchée une équation régulière pour la fonction auxiliaire $\omega(t)$. En résolvant cette équation nous obtenons la fonction cherchée à l'aide de l'opérateur $\tilde{K}$ ($\varphi = \tilde{K}\omega$). La procédure que nous avons rapportée est appelée *régularisation à droite.*

La théorie des équations régulières (de Fredholm) étant traitée à fond (cf. § 1), la liaison entre les solutions des équations (4.10) et (4.11) et l'équation initiale complète singulière (4.1) permet d'élaborer la théorie des équations intégrales singulières (théorème de Nœther). T

Au cours du passage de l'équation singulière à l'équation régulière (par régularisation à gauche ou à droite) il peut se produire aussi bien la perte de certaines solutions que l'apparition de fonctions qui soient solution de l'équation régulière sans l'être de l'équation singulière. En d'autres termes, l'équation régulière obtenue peut ne pas être équivalente à l'équation initiale.

Considérons tout d'abord le cas de la régularisation à gauche. Représentons l'équation (4.10) sous la forme:

$$\tilde{K}(K\varphi - f) = 0. \qquad (4.12)$$

Comme l'opérateur $\tilde{K}$ est homogène, toute solution de l'équation (4.1) annule l'équation (4.12) et c'est pourquoi la régularisation à gauche ne conduit pas à une perte de solutions. Dans le cas où l'opérateur $\tilde{K}$*) n'admet pas de fonctions propres ($\varkappa > 0$), la régularisation à gauche est notoirement équivalente. Dans le cas contraire peuvent apparaître des solutions complémentaires. Celles-ci représentent en général les solutions de l'équation

$$K\varphi = f + \sum \alpha_j \omega_j,$$

où $\omega_j$ sont les fonctions propres et $\alpha_j$ des constantes arbitraires.

Lors de la régularisation à droite (à la différence de la régularisation à gauche) il se peut que l'on perde une solution, puisque l'équation $\tilde{K}\omega = \varphi_0$ ($\varphi_0(t)$ est une certaine solution de l'équation (4.1)) n'est pas toujours résoluble. Aussi la régularisation n'est-elle équivalente que lorsque cette équation est résoluble quel que soit son second membre, ce qui a lieu quand $\varkappa \leqslant 0$. Les résultats rapportés plus haut permettent de démontrer les principales alternatives de la théorie des équations intégrales singulières.

1. Le nombre de solutions linéairement indépendantes de l'équation singulière est fini. La démonstration découle du fait que lors

---

*) En tant qu'opérateurs de régularisation on utilisera dans ce qui suit seuls les opérateurs élémentaires (caractéristiques): $\tilde{K} = K^{0*}$.

de la régularisation à gauche il ne se produit pas de perte de solutions et le nombre de solutions de l'équation de Fredholm est fini.

2. La condition nécessaire et suffisante pour la résolubilité de l'équation (4.1) se ramène à la validité des égalités suivantes:

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.13}$$

Ici $\psi_j(t)$ est l'ensemble des solutions linéairement indépendantes de l'équation $K'\psi = 0$.

La nécessité des conditions (4.13) découle directement de l'identité (4.3). En effet,

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = \int_L K\varphi(t)\,\psi_j(t)\,dt = \int_L \varphi K'\psi_j\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

La démonstration de la condition suffisante est effectuée de différentes façons selon le signe de l'indice. Considérons d'abord le cas où $\varkappa \geqslant 0$. L'opérateur de régularisation $\widetilde{K}$ a l'indice $-\varkappa \leqslant 0$ et par conséquent n'a pas de fonctions propres. Ceci étant, l'équation (4.11) est équivalente à l'équation initiale et les équations (4.11) et (4.1) sont simultanément résolubles ou non résolubles. Conformément à l'alternative de Fredholm, l'équation (4.11) est résoluble si les conditions suivantes sont vérifiées:

$$\int_L \chi_j \widetilde{K} f\,dt = 0. \tag{4.14}$$

Ici $\chi_j(t)$ sont les solutions de l'équation $K'\widetilde{K}'\chi = 0$ adjointe de l'équation (4.11). Transformons l'équation (4.14)

$$\int_L \chi_j \widetilde{K} f\,dt = \int_L f \widetilde{K}'\chi_j\,dt = 0.$$

Nous allons considérer l'équation $K'\widetilde{K}'\chi = 0$ comme une équation d'opérateur $K'$ et de fonction cherchée $\widetilde{K}'$. La fonction $\widetilde{K}'\chi$ est alors fonction propre de l'opérateur $K'$ et la notant $\psi_j(t)$ nous sommes conduits à la condition (4.13).

Pour $\varkappa < 0$ appliquons une régularisation à droite. La substitution $\varphi = \widetilde{K}\omega$ nous conduit à l'équation de Fredholm

$$K\widetilde{K}\omega = f, \tag{4.15}$$

équivalente à l'équation initiale (4.1). Les conditions de résolubilité de l'équation (4.15) sont de la forme

$$\int_L f(t)\,\chi_j(t)\,dt = 0,$$

où $\chi_j(t)$ est l'une quelconque des solutions de l'équation $\tilde{K}'K'\chi = 0$ adjointe de l'équation (4.15). La considérant comme équation d'opérateur $\tilde{K}'$ et de fonction cherchée $K'\chi$ et tenant compte du fait que l'opérateur $\tilde{K}'$ est un opérateur d'indice négatif (les fonctions propres n'existent pas), nous aboutissons à l'équation $K'\chi = 0$. Par conséquent, $\chi_j(t)$ est fonction propre de l'opérateur $K'$. Notant celle-ci comme auparavant $\psi_j(t)$, nous parvenons à la relation d'orthogonalité demandée.

La différence entre le nombre de solutions linéairement indépendantes ($n$) de l'équation singulière $K\varphi = 0$ et le nombre de solutions linéairement indépendantes ($n'$) de l'équation adjointe $K'\psi = 0$ est égale à l'indice de l'équation

$$n - n' = \varkappa. \tag{4.16}$$

Posons $\varkappa \geqslant 0$ et prenons $K^{0'}$ en qualité d'opérateur de régularisation. L'équation de Fredholm $K^{0'}K\varphi = 0$ sera alors équivalente à l'équation initiale et c'est pourquoi elle aussi admettra $n$ solutions. Respectivement l'équation adjointe $K'K^0\psi = 0$ de même admettra au juste $n$ solutions. L'équation obtenue est équivalente à l'équation

$$K^0\psi = \alpha_1\psi_1 + \ldots + \alpha_{n'}\psi_{n'},$$

où $\psi_j(t)$ sont les fonctions propres de l'opérateur $K'$ et $\alpha_j$ des constantes arbitraires. Comme $\varkappa \geqslant 0$, la dernière équation est alors résoluble quel que soit son second membre, et sa solution est de la forme

$$\psi(t) = \sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\varphi_j(t),$$

où $R$ est l'écriture symbolique des solutions de l'équation singulière pour le second membre correspondant. Démontrons que toutes les fonctions figurant dans le second membre sont linéairement indépendantes. Supposons que la relation

$$\sum_{j=1}^{n'} \alpha_j R\psi_j + \sum_{j=1}^{\varkappa} c_j\varphi_j(t) \equiv 0$$

soit vérifiée pour au moins un $\alpha_j \neq 0$. Appliquant à cette égalité l'opérateur $K^0$, nous obtenons $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\psi_j \equiv 0$, ce qui est impossible à cause de l'indépendance linéaire des fonctions $\psi_j(t)$. Le cas où tous les $\alpha_j = 0$ conduira à la dépendance linéaire des fonctions $\varphi_j(t)$, ce qui est également exclu.

Ainsi, l'équation intégrale $K'K^0\psi = 0$ admettra $n' + \varkappa$ solutions et par conséquent $n = n' + \varkappa$.

La discussion du cas $\varkappa < 0$ n'est pas nécessaire puisque la propriété des opérateurs d'être adjoints est réciproque; en qualité d'opérateur initial l'on doit prendre l'adjoint puisque son indice $\varkappa' = -\varkappa > 0$.

Il convient de noter que dans ce qui précède lors de l'élaboration de la théorie des équations intégrales singulières nous avons fait largement appel aux propriétés concrètes de certains opérateurs singuliers. On propose dans ce qui suit d'élargir la position du problème en le plaçant dans le cadre général de l'Analyse fonctionnelle, ce qui a permis entre autres d'obtenir certains résultats nouveaux. L'avantage de cette approche apparaîtra clairement lors de l'étude des opérateurs singuliers bidimensionnels (§§ 7, 8).

L'étude sera conduite dans l'espace de Banach que l'on désigne par $H$ (cf. L. Lyusternik, V. Sobolev [1]). Introduisons quelques définitions. Un opérateur est dit *borné* s'il transforme toute suite bornée en une suite bornée. Un opérateur est dit *complètement continu* s'il transforme toute suite bornée en une suite compacte (dont on peut extraire une sous-suite convergente).

On peut montrer (N. Muskhelishvili [4]) que les intégrales singulières représentent des opérateurs bornés dans l'espace avec la norme

$$\|\varphi\| = \max|\varphi(t)| + \max\frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}},$$

où $\mu$ est l'indice de classe H-L de la densité. Les intégrales régulières, elles, représentent des opérateurs complètement continus.

Dans le cadre de l'Analyse fonctionnelle on peut définir une position générale du problème de régularisation de l'équation opératorielle (quand l'opérateur est lui-même borné)

$$A\varphi = f. \tag{4.17}$$

L'opérateur borné $B$ est appelé régularisateur pour l'opérateur $A$, si en l'appliquant aux deux membres de l'équation (4.17) nous aboutissons à l'équation

$$BA\varphi = (I + T)\varphi = Bf, \tag{4.18}$$

où $I$ est l'opérateur identique, $T$ un opérateur complètement continu. L'équation ainsi obtenue est dite *équation de Fredholm*. On appellera dans ce qui suit les solutions non triviales des équations homogènes opératorielles zéros des opérateurs correspondants. On appellera *indice de l'équation opératorielle* la différence du nombre de zéros de l'équation fondamentale et de son adjointe.

Il découle directement des raisonnements précédents par exemple les résultats suivants. Le nombre des zéros de l'équation (4.17)

susceptible d'être régularisée *) est limité puisqu'une perte de solutions ne peut avoir lieu, par ailleurs le nombre de zéros de l'opérateur de Fredholm, lui, est fini. La notion d'opérateur conjugué permet d'obtenir les conditions nécessaires de résolubilité de l'équation (4.17). Nous avons

$$(f, \psi_j) = (A\varphi, \psi_j) = (\varphi, A^*\varphi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n^*), \quad (4.19)$$

où $\psi_j$ est l'ensemble complet des zéros de l'équation conjuguée.

Il est beaucoup plus compliqué d'établir que les conditions (4.19) sont également les conditions suffisantes de résolubilité, ceci étant vrai si existe un opérateur de régularisation. Désignons par $H_0$ l'ensemble des zéros de l'opérateur $A$. Montrons que cet ensemble est un sous-espace. Soient $\varphi_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ les éléments de l'ensemble $H_0$. Il est évident que $\sum_{k=1}^{n} c_k\varphi_k \in H_0$. Supposons que les éléments $\varphi_k$ $(\varphi_k \in H_0)$ tendent vers $\varphi_0$ . L'opérateur $A$ étant borné, nous obtenons que $A\varphi_0 = \lim A\varphi_k = 0$, c'est-à-dire que $\varphi_0 \in H_0$. On peut montrer de la même façon que l'ensemble des zéros de l'opérateur $A^*$ représente un sous-espace (que nous désignerons par $H_0^*$).

Définissons maintenant les sous-espaces $H_1$ et $H_1^*$ comme les compléments orthogonaux des sous-espaces $H_0$ et $H_0^*$ respectivement. Nous considérerons maintenant l'équation (4.17) uniquement sur les éléments du sous-espace $H_1$ en supposant que le second membre appartient au sous-espace $H_1^*$. Démontrons que dans ce cas l'équation admet une solution (c'est-à-dire que l'opérateur inverse existe). Montrons tout d'abord que l'équation (4.17) admet dans $H_1$ au plus une solution. Supposons qu'elle admet deux solutions $\varphi_1$ et $\varphi_2$. L'élément $\varphi_1 - \varphi_2$ appartient alors à $H_1$, mais d'autre part $A(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$, de sorte que $(\varphi_1 - \varphi_2) \in H_0$. $H_0$ et $H_1$ étant orthonormés, $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$. Par conséquent, sur un certain ensemble $H'$ existe l'opérateur inverse. Démontrons tout d'abord que cet ensemble est dense dans $H_1^*$ **). Dans le cas contraire il se trouvera un élément $\omega \in H_1^*$ pour lequel $(f, \omega) = 0$ si $f \in H'$. Soit $\varphi = A^{-1}f$. Nous parvenons alors à l'égalité $(A\varphi, \omega) = 0$. Cette égalité doit être vérifiée pour tout $\varphi \in H_1$ (puisque $f$ peut être pris arbitrairement dans l'ensemble $H'$). D'autre part cette égalité est évidente lorsque $\varphi \in H_0$. Donc, pour tout $\varphi \in H$ nous avons $(A\varphi, \omega) = 0$. Puis $(A\varphi, \omega) = (\varphi, A^*\omega)$ et $\varphi$ étant arbitraire, nous obtenons $A^*\omega = 0$, signifiant que $\omega \in H_0^*$. Mais puisque $\omega$ appartient simultanément à $H_1^*$, nous obtenons $\omega = 0$.

Démontrons ensuite que l'opérateur $A^{-1}$ est borné dans $H'$. Dans le cas contraire, il doit exister les éléments $\varphi_n \in H_1$ tels que $\| \varphi_n \| =$

*) Conformément à la terminologie adoptée auparavant, la régularisation proposée est une régularisation à gauche.

**) Autrement dit sa fermeture coïncide avec $H_1^*$.

$= 1$ et $A\varphi_n \to 0$. En appliquant l'opérateur de régularisation nous obtenons

$$BA\varphi_n = \varphi_n + T\varphi_n \to 0.$$

Choisissons la sous-suite $\varphi_{n_k}$ de telle sorte que $T\varphi_{n_k}$ tende vers une limite $\varphi_0$. Dans ce cas $\varphi_{n_k} \to \varphi_0$ également. L'opérateur $A$ étant borné, on a $A\varphi_0 = \lim A\varphi_{n_k} = 0$, et c'est pourquoi $\varphi_0 \in H_0$. D'autre part, $H_1$ étant un sous-espace fermé, $\varphi_0 \in H_1$, ce qui nous conduit à l'égalité $\varphi_0 = 0$, or, c'est impossible, puisqu'on a supposé jusqu'alors que $\| \varphi_0 \| = 1$.

Il est maintenant possible de démontrer que l'ensemble $H'$ coïncide avec $H_1^*$. Soit $f$ un élément quelconque de $H_1^*$. $H'$ étant dense, on peut construire une suite d'éléments $f_n$ convergeant vers $f$. Soit $\varphi_n = A^{-1}f_n$ $(A\varphi_n = f)$. Comme l'opérateur $A^{-1}$ est borné, il existe une limite de la suite $\varphi_n$ $(\tilde{\varphi})$. L'opérateur $A$ étant borné à son tour, nous obtenons $A\tilde{\varphi} = \lim A\varphi_n = \lim f_n = f$. Donc $f \in H'$, ce qui achève la démonstration. Il en découle que l'équation (4.17) est résoluble sous les conditions (4.19) s'il existe un régularisateur borné.

Considérons le cas de la régularisation dite équivalente, basée sur le fait que les équations (4.17) et (4.18) ont les mêmes solutions. A titre d'exemple montrons que les équations $A\varphi = f$ et $A^*A\varphi = A^*f$ sont équivalentes si l'équation initiale est résoluble. Supposons le contraire. Dans ce cas, outre la fonction $\varphi_0$ $(A\varphi_0 = f)$ existera une fonction $\varphi_1$ $(A^*A\varphi_1 = A^*f$ et $A\varphi_1 = f)$. Considérons la différence $A^*A(\varphi_1 - \varphi_0) = 0$ et multiplions-la par $\varphi_1 - \varphi_0$. Nous obtenons alors

$$0 = (A^* A (\varphi_1 - \varphi_0, \varphi_1 - \varphi_0)) = (A (\varphi_1 - \varphi_0), A (\varphi_1 - \varphi_0)).$$

Par conséquent, $A(\varphi_1 - \varphi_0) = 0$, $A\varphi_1 = A\varphi_0$, ce qui conduit à une contradiction.

Considérons ensuite la question de l'influence sur la valeur de l'indice d'un opérateur $T$ complètement continu, introduit complémentairement dans l'équation. Démontrons que l'indice reste alors inchangé, c'est-à-dire $\operatorname{Ind}(A + T) = \operatorname{Ind} A$.

Remarquons que les opérateurs $A$ et $A + T$ ont le même opérateur de régularisation $B$. Les équations $BA\varphi = 0$ et $A^*B^*\psi = 0$ ont un même nombre de zéros que nous désignerons par $r$. Désignons ensuite par $n$, $n^*$, $m$ et $m^*$ le nombre de zéros des opérateurs $A$, $A^*$ et $B$, $B^*$. Soient $\varphi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ et $\chi_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ les zéros des opérateurs $A$ et $B$. Il est évident que l'équation $BA\varphi = 0$ est équivalente à l'équation

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{m} c_k \chi_k, \tag{4.20}$$

où $c_k$ sont des constantes arbitraires. Pour qu'elle soit résoluble il est nécessaire comme on a montré plus haut que les conditions suivantes soient vérifiées:

$$\sum_{k=1}^{m} c_k (\chi_k, \psi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n^*). \tag{4.21}$$

Supposons que le rang de la matrice $\| (\chi_k, \psi_j) \|$ est égal à $s$. La solution de l'équation (4.20) admettra alors $m - s$ constantes plus le nombre de zéros de l'opérateur $A$ ($n$). Nous obtenons $r = n + m - s$. Calculons également ce nombre à partir de l'équation $A^*B^*\psi = 0$. Pour cela reportons-nous à l'équation

$$B^*\psi = \sum_{k=1}^{n^*} \gamma_k \psi_k, \tag{4.22}$$

où $\gamma_k$ sont des constantes. Comme cet opérateur est susceptible d'avoir un régularisateur ($A^*$), les conditions de résolubilité de (4.22) deviennent:

$$\sum_{k=1}^{n^*} \gamma_k (\psi_k, \chi_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m).$$

La matrice $\| (\psi_k, \chi_j) \|$ est conjuguée de la matrice $\| (\chi_k, \psi_j) \|$ et donc a le même rang $s$. De la sorte nous aboutissons également à l'égalité $r = n^* + m^* - s$. On a en définitive

$$n - n^* = m^* - m \quad (\text{Ind } A = -\text{ Ind } B). \tag{4.23}$$

Comme l'introduction d'un opérateur complémentaire complètement continu laisse inchangé le second membre de l'égalité (4.23), nous parvenons au résultat recherché *).

Renforçons le résultat obtenu. Montrons qu'est vérifiée une égalité plus générale $\text{Ind } (A + C) = \text{Ind } C$, où $C$ est un opérateur borné, dont la norme est inférieure à $\| B \|^{-1}$ ($B$ est comme auparavant le régularisateur de l'opérateur $A$). Nous avons $BA = I + T$. Alors

$$B(A + C) = I + BC + T = \\ = (I + BC)[I + (I + BC)^{-1}T] = (I + BC)(I + T_1), \tag{4.24}$$

où $T$ et $T_1$ sont certains opérateurs complètement continus. Il découle de (4.24) que l'opérateur $A + C$ a pour régularisateur $(I + BC)^{-1}B$. Vu la contrainte ($\| B \| \, \| C \| < 1$), le nombre de zéros de ce dernier coïncide avec le nombre de zéros de l'opérateur $B$. Il est évident également que les opérateurs $B^*$ et $B^*(I + C^*B^*)^{-1}$ auront un même nombre de zéros. Ainsi nous sommes conduits aux égalités

$$-\text{Ind } A = \text{Ind } B = \text{Ind } B(I + BC)^{-1} = -\text{ Ind } (A + C).$$

*) On a omis de démontrer dans l'exposé que les opérateurs $A^*$ et $A^* + T^*$ ont un nombre fini de zéros.

Notons que sous la condition $\| C \| < 1$ il est possible de résoudre l'équation $(I + C) \varphi = f$ par la méthode des approximations successives.

Il découle de ce qui a été démontré que la question de la résolubilité d'une équation opératorielle (avec un opérateur borné) se ramène à l'établissement de la possibilité de sa régularisation et à la détermination de tous les zéros de l'équation adjointe. On doit cependant trouver pour la construction de la solution complète tous les zéros de l'opérateur et pour cela établir d'abord leur nombre. Il est donc important de déterminer la valeur de l'indice de l'équation (puisque le nombre de zéros de l'équation adjointe doit être connu sans faute lors de l'établissement des conditions de résolubilité). C'est précisément pour cela que l'on découvre la possibilité d'une régularisation équivalente.

Il se peut (on rencontre justement un pareil cas dans certains problèmes de la théorie de l'élasticité (cf. § 29)) que l'étude des équations se termine par le calcul des fonctions propres de l'opérateur adjoint, nécessaires pour les conditions de résolubilité, et que la recherche des fonctions propres de l'équation initiale soit superflue puisqu'elles n'ont aucune influence sur la résolution du problème aux limites initial.

## § 5. Problème aux limites de Riemann dans le cas des coefficients discontinus et des contours non fermés

Dans les problèmes aux limites considérés aux paragraphes précédents les coefficients $G(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions continues et les contours correspondants $L$ des contours fermés. La solution obtenue (fonction analytique par tranches) peut être automatiquement prolongée par continuité sur le contour. En élargissant la position du problème aux limites pour le cas des contours non fermés et en tolérant pour les coefficients $G(t)$ et $g(t)$ des discontinuités de première espèce, on est conduit à introduire en qualité de fonctions admissibles des fonctions possédant aux points de discontinuité des coefficients et aux extrémités des contours des singularités intégrables. La nécessité d'une telle contrainte est liée à des considérations d'ordre aussi bien mathématique que physique (dans les applications). La contrainte introduite assure l'unicité de la solution et la condition de limitation de l'énergie pour les problèmes aux limites qui ont une signification physique.

Par un procédé très simple utilisant l'introduction des discontinuités correspondantes aux extrémités des arcs, le cas du contour non fermé peut être ramené à un problème relatif à un contour fermé. Pour cela il faut réunir les extrémités des arcs par des courbes qui ne se coupent pas, de façon à former un contour fermé. Sur les courbes auxiliaires on doit poser $G(t) = 1$ et $g(t) = 0$. On est ainsi

conduit au problème relatif à un contour entier pour lequel les coefficients présentent des discontinuités en certains points. Dans ce qui suit le cas des contours non fermés sera, en tant que cas particulier de la solution générale, l'objet d'une étude particulière du fait de son importance primordiale pour les applications.

Passons à la solution du problème de Riemann pour un contour fermé dans le cas où les fonctions $G(t)$ et $g(t)$ présentent en certains points des discontinuités de première espèce et la fonction $g(t)$ a en outre des singularités de la forme

$$g(t) = \frac{g^*(t)}{|t-t_k|^{\alpha}}, \tag{5.1}$$

où $\alpha < 1$ et $g^*(t)$ est de classe H-L.

La solution du problème de Riemann peut être recherchée sous la forme de fonctions appartenant à différentes classes. On peut, ainsi, par exemple, rechercher une solution bornée en tous les points de discontinuité des coefficients. On peut aussi rechercher une solution non bornée, mais intégrable en tous les points de discontinuité des coefficients. On peut enfin rechercher une solution bornée dans le voisinage de certaines extrémités et non bornée dans le voisinage de certaines autres. Par solution non bornée intégrable on entend une solution présentant des singularités de la forme

$$|\Phi^{\pm}(t)| < \frac{C}{|t-t_k|^{\alpha}} \quad (\alpha < 1).$$

Aux points où le coefficient $g(t)$ a une singularité de la forme (5.1) les fonctions $\Phi^{\pm}(t)$ ont une singularité de même caractère que (2.28).

Etudions le problème de Riemann à coefficient $G(t)$ continu. Considérons tout d'abord le cas où le coefficient $G(t)$ présente une discontinuité en un seul point du contour, à savoir au point $t_1$. Introduisons deux fonctions auxiliaires $(z-z_0)^{\gamma}$, $(z-t_1)^{\gamma}$, où $z_0 \in D^+$, $\gamma = \alpha + i\beta$ est un certain nombre complexe. Les points de ramification de la première fonction sont les points $z_0$ et $\infty$, ceux de la seconde fonction sont respectivement $t_1$ et $\infty$. Dans le plan coupé le long de la courbe réunissant les points $z_0$ et $t_1$ et allant à l'infini ces fonctions sont univoques. Formons une fonction analytique par tranches $\omega(z)$, définie par les relations

$$\omega^+(z) = (z-t_1)^{\gamma}, \quad \omega^-(z) = \left(\frac{z-t_1}{z-z_0}\right)^{\gamma}.$$

L'univocité de ces fonctions dans les domaines correspondants est assurée par des coupures adéquates. Ces fonctions sont continues en tous les points du contour $L$ sauf au point $t_1$.

Introduisons une nouvelle fonction

$$\Omega(t)=\frac{\omega^-(t)}{\omega^+(t)}=(t-z_0)^{-\gamma},$$

d'où

$$\frac{\Omega(t_1-0)}{\Omega(t_1+0)}=e^{-2\pi i\gamma}.$$

Examinons le comportement de la fonction $\omega(z)$ au voisinage du point $t_1$. Introduisons un repère polaire local, plaçant son origine en ce point:

$$\omega^+(z)=(z-t_1)^\gamma=e^{\gamma\ln(z-t_1)}=r^\alpha e^{-\beta\theta}e^{i(\beta\ln r+\alpha\theta)},$$
$$z-t_1=re^{i\theta}.$$

Donc pour $\alpha>0$ la fonction $\omega^+(z)$ admet au point $t_1$ un zéro d'ordre $\alpha$; pour $\alpha<0$ un pôle d'ordre $-\alpha$ (la condition d'intégrabilité conduit à la condition $-1<\alpha$). Finalement, pour $\alpha=0$ la fonction $\omega^+(z)$ reste bornée sans tendre vers une limite définie quand le point $z$ tend vers le point $t_1$. De propriétés analogues jouit la fonction $\omega^-(z)$ au voisinage du point $t_1$.

Passons à la résolution concrète du problème homogène de Riemann (3.4). Rappelons que pour l'instant nous ne considérons que le cas où la fonction n'admet qu'un seul point de discontinuité. Définissons maintenant $\gamma$ de la façon suivante:

$$\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)} \tag{5.2}$$

et formons les fonctions $\omega^+(z)$ et $\omega^-(z)$ correspondant à la valeur donnée de $\gamma$. Introduisons une nouvelle fonction analytique par tranches $\Phi_1(z)$ en posant $\Phi(z)=\omega(z)\Phi_1(z)$. La condition aux limites (3.4) prend alors la forme

$$\Phi_1^+(t)=G_1(t)\Phi_1^-(t),\quad G_1(t)=\Omega(t)G(t). \tag{5.3}$$

Le coefficient $G_1(t)$ du problème auxiliaire de Riemann est d'emblée une fonction continue sur tout le contour $L$, y compris au point $t_1$. Comme la fonction analytique par tranches $\Phi_1(z)$ est continue, les singularités de la fonction $\Phi(z)$ ne seront déterminées que par le comportement de la fonction $\omega(z)$ au voisinage du point de discontinuité. Or, ce comportement ne dépend que du choix de la branche du logarithme dans la formule (5.2). Si l'on ne tolère que des solutions bornées, on doit avoir l'inégalité $0\leqslant \operatorname{Re}\gamma<1$. Si l'on tolère des solutions non bornées, on doit avoir l'inégalité $-1<\operatorname{Re}\gamma<0$. La limitation à gauche dans la dernière inégalité est liée à la condition d'intégrabilité.

Il est intéressant de construire des estimations analogues directement pour le coefficient $G(t)$. Notons $\theta$ l'accroissement d'une branche quelconque de l'argument de $G(t)$ quand on parcourt le contour

$L$. Il est évident que $\theta$ représente la discontinuité de l'argument de $G(t)$ au point de discontinuité, aussi

$$\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}=\rho e^{i\theta},$$

et par conséquent,

$$\gamma=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}=\frac{\theta}{2\pi}-\varkappa-i\,\frac{\ln\rho}{2\pi},$$

où le nombre entier $\varkappa$ doit être choisi conformément aux inégalités données plus haut, qui prennent maintenant la forme

$$0\leqslant\frac{\theta}{2\pi}-\varkappa<1,\qquad -1<\frac{\theta}{2\pi}-\varkappa<0.$$

Donc pour la classe de solutions bornées on a $\varkappa=[\theta/(2\pi)]$ *) et pour la classe de solutions non bornées, $\varkappa=[\theta/(2\pi)]+1$. Si $\theta/(2\pi)$ est un nombre entier, seule la première condition est remplie à cause des contraintes imposées à Re $\gamma$. La solution, tout en restant bornée au voisinage du point $t_1$, ne tendra pas vers une limite à l'approche du point $t_1$. On appelle alors le point de discontinuité point de valeur automatiquement bornée.

Calculons maintenant l'indice du problème auxiliaire de Riemann, c'est-à-dire l'indice de la fonction $G_1(t)$:

$$\operatorname{Ind}G_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\ln\left[\frac{G(t_1-0)}{G(t_1+0)}e^{-2\pi i\varkappa}\right]=\frac{1}{2\pi i}\ln e^{2\pi i\varkappa}=\varkappa.$$

On appellera cette valeur indice du problème initial de Riemann. Ainsi la valeur de l'indice dépend de la classe de solutions choisie lorsque le coefficient $G(t)$ présente une discontinuité.

Étendons les résultats obtenus au cas où le coefficient $G(t)$ admet des discontinuités de première espèce sur l'ensemble des points $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Sur chacun des arcs on peut définir arbitrairement pour la fonction $\ln G(t)$ une branche (tout en interdisant le passage d'une branche à l'autre aux points intérieurs à ces arcs). Comme précédemment, nous introduirons en chaque point $t_k$ une variation $\theta_k$ de l'argument de la fonction $G(t)$. On obtient alors

$$\frac{G(t_k-0)}{G(t_k+0)}=\rho_k e^{i\theta_k},\quad (k=1,2,\ldots,n).$$

Posons maintenant

$$\gamma_k=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(t_k-0)}{G(t_k+0)}=\frac{\theta_k}{2\pi}-\varkappa_k-i\,\frac{\ln\rho_k}{2\pi},$$

*) Le crochet [ ] indique la partie entière du nombre.

où les nombres $\varkappa_k$ sont définis comme précédemment en fonction de la nature de la singularité au point considéré. Introduisons une nouvelle fonction analytique par morceaux

$$\Phi(z) = \prod_{k=1}^{n} \omega_k(z) \Phi_1(z),$$

où la désignation $\omega_k(z)$ veut dire que la fonction est définie par le point $t_k$. Il est clair que les coupures du plan sont effectuées différemment pour chaque fonction $\omega_k(z)$ (pour le même choix du point $z_0$).

Pour la fonction $\Phi_1(z)$ nous obtenons le problème aux limites à coefficient continu

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{n} (t-z_0)^{-\nu_k} G(t) \Phi_1^-(t).$$

On peut montrer comme auparavant que l'indice du problème auxiliaire de Riemann que nous considérerons également comme indice du problème initial est défini par la somme suivante: $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$.

La construction de la solution définitive ne présente pas de difficultés.

Passons au problème non homogène de Riemann (3.2). Nous supposerons pour l'instant que la fonction $g(t)$ est de classe H-L. Conformément à ce qui précède, passons à la résolution du problème aux limites auxiliaire à coefficient continu

$$\Phi_1^+(t) = \prod_{k=1}^{n} (t-z_0)^{-\nu_k} G(t) \Phi_1^-(t) + \prod_{k=1}^{n} (t-t_k)^{-\nu_k} g(t).$$

En remplaçant le coefficient $\prod_{k=1}^{n} (t-z_0)^{-\nu_k} G(t)$ par le rapport des fonctions canoniques (3.11) on peut exprimer la condition aux limites sous la forme

$$\frac{\Phi_1^+(t)}{X_1^+(t)} - \frac{\Phi_1^-(t)}{X_1^-(t)} = \frac{\prod_{k=1}^{n} (t-t_k)^{-\nu_k} g(t)}{X_1^+(t)}.$$

La solution de ce problème est de la forme (3.17) et s'écrit ainsi:

$$\frac{\Phi_1(z)}{X_1(z)} = \Psi(z) + P_{\varkappa-1}(z), \tag{5.4}$$

où $P_{\varkappa-1}(z)$ est un polynôme de degré $\varkappa - 1$ pour $\varkappa \geqslant 1$ ; pour $\varkappa < 1$ le polynôme fait défaut.

Rapportons maintenant l'expression de la fonction cherchée

$$\Phi^+(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-t_k)^{\gamma_k}X_1^+(z)\,[\Psi^+(z)+P_{\varkappa-1}(z)],$$
$$\Phi^-(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-t_k}{z-z_0}\right)^{\gamma_k}X_1^-(z)\,[\Psi^-(z)+P_{\varkappa-1}(z)]. \qquad (5.5)$$

Plus haut on a utilisé les notations

$$X_1^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\qquad X_1^-(z)=(z-z_0)^{-\varkappa}e^{\Gamma^-(z)},$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[(\tau-z_0)^{-\varkappa}\prod_{k=1}^{n}(\tau-z_0)^{-\gamma_k}G(\tau)\right]}{\tau-z}\,d\tau,$$

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\prod_{k=1}^{n}(\tau-t_k)^{-\gamma_k}g(\tau)}{X_1^+(\tau)(\tau-z)}\,d\tau.$$

De la structure de l'expression de la fonction $\Psi(z)$ découle la nécessité de la contrainte $\operatorname{Re}\gamma_k<1$ que nous avons introduite précédemment (sans justification satisfaisante). Pour $\varkappa<0$ le problème aux limites est résoluble sous les conditions analogues à (3.18):

$$\int_L\frac{\prod_{k=1}^{n}(\tau-t_k)^{-\gamma_k}g(\tau)}{X_1^+(\tau)}\,\tau^{j-1}\,d\tau=0\qquad(j=1,2,\ldots,-\varkappa-1).$$

Admettons qu'aux points $t_1', t_2', \ldots, t_r'$ la fonction $g(t)$ se représente par:

$$g(t)=\frac{g^*(t)}{(t-t_k')^{\gamma_k'}},$$

où $\gamma_k'=\alpha_k'+i\beta_k'$ $(0\leqslant\alpha_k'<1)$ et la fonction $g^*(t)$ est de classe H-L partout sauf aux points $t_1'', t_2'', \ldots, t_s''$ où elle présente des discontinuités de première espèce.

Supposons tout d'abord que les points spécifiés $t_1'', t_2'', \ldots, t_s''$ sont différents des points de discontinuité du coefficient $G(t)$. Dans ce cas la solution (5.4) reste également valable. Il est vrai qu'en vertu des formules (2.31) la fonction $\Phi^{\pm}(z)$ aura alors au voisinage des points $t_k'$ une singularité de la forme $(z-t_k')^{-\gamma_k'}$, et au voisinage des points $t_k''$ une singularité logarithmique. La coïncidence d'un des points $t_k''$ avec le point de discontinuité du coefficient $G(t)$ n'intro-

duit pas de changement dans le comportement de la fonction

$$\frac{\prod_{k=1}^{n} (\tau - t_k)^{-\gamma_k} g(\tau)}{X_1^+(\tau)}.$$

La coïncidence d'un des points $t'_k$ avec le point $t_k$ pourra entraîner une addition des singularités. Si la somme $\alpha_k + \alpha'_k < 1$, la théorie que nous avons considérée n'est applicable que pour les solutions non bornées au point $t_k$ (sauf $\alpha'_k = 0$).

En qualité d'application étudions le problème de Riemann pour un système de contours non fermés $L_1, L_2, \ldots, L_n$ (dont l'ensemble est désigné par $L$ dans ce qui suit) quand le coefficient $G(t)$ est identiquement égal à une constante $c < 0$. Ce cas est important pour son application en théorie de l'élasticité (voir plus loin aux §§ 26 et 27). Désignons par $a_k$ et $b_k$ les extrémités des arcs ($a_k$ est le début du parcours, $b_k$ l'extrémité). Conformément à ce qui précède, nous pouvons réunir les extrémités $b_k$ et $a_{k+1}$ par des arcs suffisamment arbitraires $L'_k$ (nous désignerons ce système d'arcs par $L'$). L'ensemble des contours $L$ et $L'$ forme un contour fermé.

Ainsi, nous parvenons de nouveau au problème aux limites de Riemann (3.2). Le coefficient $G(t) = c < 0$ sur les arcs $L_k$, alors qu'il est égal à un sur les arcs $L'_k$. Le coefficient $g(t)$ est nul sur les arcs $L'_k$. Définissons en tous les points $a_k$ et $b_k$ les relations *):

$$\frac{G(a_k - 0)}{G(a_k + 0)} = \frac{1}{c} e^{-i\pi}, \quad \gamma_k = -\frac{1}{2} - \varkappa_k + i\beta, \quad \frac{G(b_k - 0)}{G(b_k + 0)} = c e^{i\pi},$$
$$\gamma'_k = \frac{1}{2} - \varkappa'_k - i\beta, \quad \beta = \frac{\ln |c|}{2\pi}.$$

Le cran (ou son absence) sur $\gamma_k$ indique que la valeur est prise respectivement aux extrémités $b_k$ ou $a_k$.

Nous cherchons tout d'abord une solution devenant infinie en toutes les extrémités, de sorte que les nombres entiers $\varkappa_k$ et $\varkappa'_k$ définis par les formules précédentes sont respectivement égaux à $\varkappa = 0$, $\varkappa' = 1$, d'où $\gamma_k = \frac{1}{2} + i\beta$, $\gamma'_k = -\frac{1}{2} - i\beta$. On obtient donc que l'indice du problème de Riemann est égal au nombre d'arcs $n$ et que le coefficient du problème auxiliaire revêt dans son expression définitive un aspect très simple $G_1(t) = (t - z_0)^n$. La recherche de la fonction canonique est élémentaire : on trouve $X_1^+(z) = 1$, $X_1^-(z) = (z - z_0)^{-n}$. Par conséquent la solution définitive tirée des for-

*) Le choix de valeurs de $\theta$ introduit ici diffère légèrement du choix proposé plus tôt (voir page 67), ceci se manifestant dans un choix autre de nombres $\varkappa$ (cf. S. Gakhov [1]).

mules (5.5) se représente sous la forme

$$\Phi(z) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{i\beta}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}} \int\limits_L \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(\tau-a_k)(\tau-b_k)}\, g(\tau)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-b_k}{\tau-a_k}\right)^{i\beta}(\tau-z)}\, d\tau + \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{i\beta}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}} P_{n-1}(z), \tag{5.6}$$

où $P_{n-1}(z)$ est un polynôme de degré $n-1$. Il convient de souligner que les radicaux figurant sous le signe d'intégration ne sont pas des fonctions multivoques, car le système de coupures choisi ($z_0 - a_k - \infty$, $z_0 - b_k - \infty$) entraîne leur univocité. En d'autres termes, il s'agit chaque fois de l'une quelconque des branches de la fonction multivoque dans le plan coupé le long des arcs $L_k$.

Passons ensuite à la solution bornée en tous les points $a_k$, mais comme auparavant non bornée aux extrémités $b_k$. Dans ce cas nous aurons les égalités $\varkappa_k = -1$ et $\gamma_k = \frac{1}{2} + i\beta$. L'indice du problème de Riemann est égal à zéro et la solution, compte tenu de (5.5), s'écrit

$$\Phi(z) = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{i\beta}\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(z-a_k)}}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(z-b_k)}} \times \int\limits_L \frac{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(\tau-b_k)}\, g(\tau)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\sqrt{(\tau-a_k)}\left(\frac{\tau-b_k}{\tau-a_k}\right)^{i\beta}} \frac{d\tau}{(\tau-z)}. \tag{5.7}$$

Dans les cas où l'on recherche une solution bornée en toutes les extrémités, l'indice s'avère égal à $-n$ et la solution s'écrit

$$\Phi(z)=\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{i\beta}\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}\times$$
$$\times\int_L \frac{1}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-b_k}{\tau-a_k}\right)^{i\beta}\sqrt{(\tau-a_k)(\tau-b_k)}}\frac{g(\tau)}{\tau-z}\,d\tau. \quad (5.8)$$

L'expression (5.8) vérifie la condition à l'infini (et par conséquent représente la solution du problème de Riemann) si l'on a les relations suivantes

$$\int_L \frac{g(\tau)}{\prod\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{\tau-b_k}{\tau-a_k}\right)^{i\beta}\sqrt{(\tau-a_k)(\tau-b_k)}}\tau^{j-1}\,d\tau=0 \quad (j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1). \quad (5.9)$$

L'analyse des solutions (5.6) à (5.8) montre qu'en fonction de certaines contraintes imposées aux extrémités $a_k$ et $b_k$ il convient de déplacer les radicaux correspondants du dénominateur au numérateur et inversement. L'indice, lui, est toujours égal au nombre d'arcs moins le nombre d'extrémités en lesquelles la solution est bornée.

Notons que les intégrales figurant dans les expressions (5.6) à (5.8) peuvent être calculées sous une forme compacte si la fonction $g(t)$ est un polynôme (cf. N. Muskhelishvili [4]).

## § 6. Equations intégrales singulières dans le cas de coefficients discontinus et de contours non fermés

De même qu'on a élaboré au § 4 la théorie des équations intégrales singulières en se basant sur la théorie du problème aux limites de Riemann pour les contours fermés, on construit la théorie correspondante des équations singulières sur la base du problème aux limites pour les contours non fermés.

L'équation intégrale pour le cas considéré coïncide en apparence avec l'équation (4.1) ou (4.1′) si l'intégration est étendue à tout l'ensemble de contours non fermés $L_j$ ($j=1,\,2,\,\ldots,\,n$) désigné comme au § 5 par $L$. Ainsi, nous considérerons les équations intégrales de la forme

$$K\varphi=a(t)\,\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)}{\tau-t}\,d\tau+\int_L k(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \quad (6.1)$$

$$a(t),\quad b(t),\quad f(t)\in H(A,\,\lambda).$$

L'équation associée est comme auparavant l'équation (4.2).

On peut établir à l'appui de l'analyse de la solution des équations intégrales singulières pour des contours fermés que la fonction recherchée appartient à la même classe H-L que le second membre. Il est évident que dans le cas considéré ce résultat ne sera plus de rigueur. Plus encore, il faut, pour construire la solution, définir à l'avance, en partant de considérations complémentaires (peut-être physiques), l'ordre de la singularité aux points d'extrémités (de la même façon que lors de la considération du problème aux limites).

Il est commode pour la suite de l'exposé d'introduire une nouvelle désignation des extrémités des contours. Nous les désignerons par une même lettre « $c$ » avec un indice tel qu'aux extrémités $c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ la solution soit bornée, alors qu'aux extrémités restantes $(k = q + 1, q + 2, \ldots, 2n)$ elle sera non bornée, mais certes intégrable. Nous dirons maintenant que la solution de l'équation intégrale appartient à la classe $h\ (c_1, c_2, \ldots, c_q)$, si elle est bornée aux points $c_k$ $(k = 1, 2, \ldots, q)$ et non bornée aux points $c_k$ $(k = q + 1, q + 2, \ldots, 2n)$. Nous entendrons par solution associée de l'équation associée la solution en classe $h\ (c_{q+1}, c_{q+2}, \ldots, c_{2n})$, dite classe associée. Comme dans le cas des contours fermés nous exigerons que la condition $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ soit vérifiée.

Considérons d'abord l'équation caractéristique

$$K^0\varphi = a(t)\,\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t). \tag{6.2}$$

Moyennant l'intégrale de type Cauchy

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau$$

passons au problème auxiliaire de Riemann

$$[a(t) + b(t)]\,\Phi^+(t) = [a(t) - b(t)]\,\Phi^-(t) + f(t). \tag{6.3}$$

La solution générale de ce problème s'écrit au moyen de (5.4) où $X(t)$ est une fonction canonique bornée aux mêmes points $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_q$, ou, conformément à la terminologie introduite, une fonction de classe $h\ (c_1, c_2, \ldots, c_q)$. La solution de l'équation (6.1) se représente alors sous la forme

$$\varphi(t) = a(t)\,f(t) - \frac{b(t)\,Z(t)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)}{Z(\tau)}\,\frac{d\tau}{\tau - t} + b(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-1}(t), \tag{6.4}$$

où

$$Z(t) = [a(t) + b(t)]\, X^{+}(t) = [a(t) - b(t)]\, X^{-}(t) = \prod_{k=1}^{n} (t - c_k)^{-\varkappa_k} e^{\Gamma(t)}.$$

$$\Gamma(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln\{[a(t) - b(t)]/[a(t) + b(t)]\}}{\tau - t}\, d\tau, \quad \varkappa = \sum_{k=1}^{n} \varkappa_k.$$

Les constantes $\varkappa_k$ sont définies conformément au type de singularité aux extrémités, le polynôme est de degré $\varkappa - 1$, puisque $\Phi(\infty)$ est toujours égale à zéro. Le polynôme fait défaut lorsque $\varkappa \leqslant 0$. Pour $\varkappa < 0$ la solution du problème de la classe mentionnée existe si et seulement si sont vérifiées les conditions

$$\int_L \frac{f(t)}{Z(\tau)} \tau^{j-1} d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, -\varkappa). \tag{6.5}$$

Considérons maintenant l'équation associée à l'équation caractéristique

$$K'\psi = a(t)\, \psi(t) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\, \psi(\tau)}{\tau - t}\, d\tau = f_1(t). \tag{6.6}$$

Moyennant l'intégrale de type Cauchy

$$\Omega(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{b(\tau)\, \psi(\tau)}{\tau - z}\, d\tau$$

nous passons au problème aux limites

$$[a(t) - b(t)]\, \Omega^{+}(t) = [a(t) + b(t)]\, \Omega^{-}(t) + f_1(t). \tag{6.7}$$

Il découle immédiatement de ce qui précède que la fonction $X'(z) = 1/X(z)$ représentera la fonction canonique du problème (6.7) en classe associée. Par conséquent l'indice du problème associé en classe associée sera égal à l'indice du problème fondamental avec le signe contraire.

La solution générale de l'équation (6.6) en classe $h(c_{q+1}, c_{q+2}, \ldots$ $\ldots, c_{2n})$ s'écrit sous la forme

$$\psi(t) = a(t)\, f_1(t) + \frac{1}{\pi i Z(t)} \int_L \frac{Z(\tau)\, b(\tau)\, f_1(\tau)}{\tau - t}\, d\tau + \frac{1}{Z(t)} P_{-\varkappa-1}(t). \tag{6.8}$$

Pour $-\varkappa \leqslant 0$ le polynôme n'existe pas et de plus pour $-\varkappa < 0$ l'existence de la solution implique que soient vérifiées les conditions

$$\int_L Z(\tau)\, b(\tau)\, f_1(\tau)\, \tau^{j-1}\, d\tau = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, \varkappa). \tag{6.9}$$

Il découle de la représentation (6.8) que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$\psi_j(t)=\frac{1}{Z(t)}\,t^{j-1}\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ -\varkappa).$$

Donc les conditions de résolubilité de l'équation initiale, données ci-dessus sous la forme (6.5), peuvent être représentées sous la forme traditionnelle

$$\int_L f(\tau)\,\psi_j(\tau)\,d\tau=0\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ -\varkappa). \tag{6.5'}$$

La comparaison des résultats obtenus nous conduit à la formulation du théorème de Nœther pour les équations singulières caractéristiques sur les contours non fermés sous la même forme que pour les contours fermés (voir § 4). Pour la résolubilité de l'équation intégrale (6.3) dans la classe $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ il faut et il suffit que la condition (6.5′) soit vérifiée, pour la résolubilité de l'équation associée (6.4) dans la classe associée il faut que soient vérifiées les conditions (6.9), celles-ci pouvant être représentées également sous la forme

$$\int_L f_1(\tau)\,\varphi_j(\tau)\,d\tau=0\quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ \varkappa), \tag{6.9'}$$

où $\varphi_j(t)$ est la solution de l'équation initiale homogène.

Remarquons que la condition d'égalité de l'indice de l'équation à la différence du nombre de solutions des équations homogènes initiale ($k$) et associée ($k'$) est également vérifiée. En effet $k=\varkappa$, $k'=0$ pour $\varkappa\geqslant 0$, et $k=0$, $k'=-\varkappa$ pour $\varkappa\leqslant 0$.

Passons à la considération de l'équation singulière complète (6.1). La méthode exposée au § 4 d'étude des équations intégrales singulières sur des contours fermés se transpose naturellement au cas examiné avec des généralisations adéquates conditionnées par la présence de singularités dans les noyaux et la solution cherchée. Nous conviendrons d'admettre comme indice de l'équation complète (certes en même classe $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$) l'indice de sa partie caractéristique.

Dans le cas où $\varkappa\geqslant 0$ nous réalisons au moyen de l'opérateur (6.6) une régularisation à gauche, qui nous conduit à l'équation intégrale

$$K'K\varphi = K'f, \tag{6.10}$$

équivalente à l'équation initiale. Il est à remarquer que cette équation n'est pas, strictement parlant, une équation de Fredholm, puisque son noyau possède des singularités aux extrémités des contours. Rappelons toutefois qu'au § 1 nous avions démontré que les alternatives de Fredholm étaient vérifiées pour ce cas. Quant aux singularités

de la fonction recherchée, on en a parlé au § 5 en considérant les problèmes aux limites. Il est important que les classes associées soient introduites précisément de façon à éviter que les singularités s'ajoutent (ceci pourrait conduire à l'apparition de singularités non intégrables).

Dans le cas où $\varkappa < 0$ il faut réaliser une régularisation à droite. Remarquons que quand deux fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ appartiennent à des classes associées, l'identité (4.3) est vérifiée pour les contours non fermés. Les démonstrations des théorèmes de Noether reproduisent les démonstrations pour le cas des contours fermés en tenant compte de la structure concrète de l'opérateur (6.6) et du fait que les solutions des équations initiale et associée sont considérées en classes associées.

## § 7. Intégrales singulières bidimensionnelles

Lors de l'exposé de la théorie des équations intégrales de Fredholm le cas d'une seule variable n'est considéré que pour simplifier l'écriture, bien que par ces mêmes méthodes on puisse obtenir des résultats entièrement analogues pour une dimension arbitraire. Par contre, la transposition de la théorie considérée plus haut des intégrales unidimensionnelles singulières et des équations intégrales au cas d'une dimension plus élevée s'avère dans une grande mesure impossible. L'élaboration de la théorie correspondante est liée au développement de méthodes spécifiques. Remarquons également qu'on peut étudier le cas de deux dimensions par des procédés beaucoup plus simples que pour le cas d'une dimension arbitraire. Aussi limiterons-nous à ce cas tout en tenant compte du fait que les équations intégrales des problèmes spatiaux de la théorie de l'élasticité (voir chap. VI) sont des équations bidimensionnelles. Notons toutefois que la théorie des équations bidimensionnelles peut être transposée en plus grande partie au cas général.

Soit $F(q)$ une fonction définie sur une certaine surface $S$ (que nous supposerons tout d'abord être un plan que l'on désignera par $\Pi$). Considérons un point quelconque $q_0$ et soit $\Pi_\varepsilon$ une région de $\Pi$ dont tous les points se trouvent à une distance du point $q_0$ inférieure à $\varepsilon$. Supposons que sur la partie restante du plan la fonction $F(q)$ soit intégrable pour tout $\varepsilon$. Si existe la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Pi - \Pi_\varepsilon} F(q)\, dS_q,$$

elle est appelée *intégrale singulière* et notée

$$\int\limits_{\Pi} F(q)\, dS_q.$$

Nous considérerons maintenant les intégrales singulières de la forme

$$\int_{\Pi} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q. \tag{7.1}$$

Nous supposerons au début que la fonction $u(q)$ vérifie la condition H-L et qu'elle décroît à l'infini comme $1/|q|^{\beta}$ $(\beta > 0)$. Nous nous limiterons également au cas où le noyau $K(q_0, q)$ peut être représenté par

$$K(q_0, q) = \frac{1}{r^2(q_0, q)} f(q_0, \theta), \tag{7.2}$$

où $r = r(q_0, q)$ est la distance entre les points $q_0$ et $q$, et $\theta$ l'angle que forme le rayon allant du point $q_0$ au point $q$ avec une droite orientée fixe. La fonction $f(q_0, \theta)$ est appelée *caractéristique d'une* telle *intégrale singulière*, la fonction $u(q)$, comme auparavant, *densité*.

Etablissons les conditions d'existence des intégrales singulières introduites plus haut. Nous avons

$$\int_{\Pi} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q = \int_{r>1} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q +$$
$$+ \int_{r<1} K(q_0, q)\, [u(q) - u(q_0)]\, dS_q + u(q_0) \int_{r<1} K(q_0, q)\, dS_q. \tag{7.3}$$

En vertu des contraintes imposées les deux premières intégrales sont absolument convergentes. Pour estimer la troisième intégrale nous introduisons (dans le voisinage du point $q_0$) un repère polaire local. On a alors

$$\int_{r>1} K(q_0, q)\, dS_q = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon<r<1} K(q_0, q)\, dS_q = \lim \ln \frac{1}{\varepsilon} \int_{L} f(q_0, \theta)\, dL,$$

où $L$ est un cercle de rayon $\varepsilon$ centré en $q_0$. La limite du second membre existe si et seulement si

$$\int_{L} f(q_0, \theta)\, dL = 0. \tag{7.4}$$

Donc la condition (7.4) est la condition d'existence des intégrales singulières de la classe considérée. Dans ce qui suit nous supposerons que cette condition est toujours vérifiée.

A l'appui de notre exposé précédent nous obtenons pour l'intégrale singulière à partir de (7.3) la représentation

$$\int_{\Pi} K(q_0, q) u(q) dS_q = \int_{r>\delta} K(q_0, q) u(q) dS_q + \int_{r<\delta} K(q_0, q)[u(q) - u(q_0)] dS_q. \quad (7.5)$$

La possibilité de remplacer l'unité (lors de la définition du domaine d'intégration) par une constante arbitraire $\delta$ est évidente.

Admettons que pour des raisons quelconques (voir plus loin le cas d'une surface arbitraire) la forme du domaine découpé diffère d'un cercle. Supposons que l'équation de la frontière de ce domaine $\sigma_\varepsilon$ (auparavant circulaire) est: $r = \alpha(\varepsilon, q_0, \theta)$. Nous supposerons qu'existe la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\alpha(\varepsilon, q_0, \theta)}{\varepsilon} = \beta(q_0, \theta) > 0.$$

Etendons maintenant la représentation (7.5). Nous avons

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Pi - \sigma_\varepsilon} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} u(q) dS_q = \int_{r>\delta} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} u(q) dS_q + \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\alpha<r<\delta} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2}[u(q) - u(q_0)] dS_q - u(q_0) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_L f(q_0, \theta) \ln \alpha(\varepsilon, q_0, \theta) dL.$$

De la condition (7.4) découle

$$\int_L f(q_0, \theta) \ln \alpha(\varepsilon, q_0, \theta) dL = \int_L f(q_0, \theta) \ln \frac{\alpha(\varepsilon, q_0, \theta)}{\varepsilon}.$$

Par conséquent

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Pi - \sigma_\varepsilon} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} u(q) dS_q = \int_{\Pi} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} u(q) dS_q - u(q_0) \int_L f(q_0, \theta) \ln \beta(q_0, \theta) dL. \quad (7.6)$$

On a ainsi montré que l'intégrale singulière peut être aussi définie par d'autres procédés (pour une fonction arbitraire $\beta(q_0, \theta)$), toutefois dans ce cas la condition de son existence sera toujours l'égalité (7.4). Il est clair que pour $\beta = 1$ les formules (7.5) et (7.6) conduiront à un résultat identique.

Démontrons que l'intégrale singulière

$$v(q_0) = \int\limits_{\Pi} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q$$

vérifie la condition H-L si la caractéristique $f(q_0, \theta)$ est continûment dérivable par rapport aux coordonnées cartésiennes du point $q$ et par rapport à l'angle $\theta$ (par conséquent nous avons l'estimation grad $K(q_0, q) = O(r^{-3})$ quand $r \to 0$) *). Nous partirons de la représentation (7.5). Le premier terme est une fonction admettant des dérivées continues. Aussi arrêtons-nous uniquement au second terme que pour des raisons de commodité nous noterons $\omega(q_0)$. Soit la constante $|h| < \delta/2$, alors

$$\omega(q_0+h) - \omega(q_0) = \int\limits_{|q_0+h-q|<\delta} K(q_0+h, q)\,[u(q) - u(q_0+h)]\, dS_q -$$
$$- \int\limits_{|q_0-q|<\delta} K(q_0, q)\,[u(q) - u(q_0)]\, dS_q =$$
$$= \int\limits_{|q_0-q|<\delta-|h|} K(q_0+h, q)\,[u(q) - u(q_0+h)]\, dS_q -$$
$$- \int\limits_{|q_0-q|<\delta-|h|} K(q_0, q)\,[u(q) - u(q_0)]\, dS_q +$$
$$+ \int\limits_{(|q_0+h-q|<\delta)\cap(|q_0-q|>\delta-|h|)} K(q_0+h, q)\,[u(q) - u(q_0+h)\, dS_q -$$
$$- \int\limits_{\delta-|h|<|q_0-q|<\delta} K(q_0, q)\,[u(q) - u(q_0)\, dS_q. \quad (7.7)$$

Dans les deux derniers termes les fonctions sous le signe somme sont bornées et l'aire de la surface d'intégration est de l'ordre $h$. Partageons chacune des deux premières intégrales en intégrales étendues à la surface du cercle $|q_0 - q| < 2|h|$ et de l'anneau $2|h| < |q_0 - q| < \delta - |h|$. Alors, compte tenu des inégalités

$$|u(q) - u(q_0)|\,|K(q_0, q)| < Cr^{\alpha-2},$$
$$|u(q) - u(q_0+h)|\,|K(q_0+h, q)| < Cr_1^{\alpha-2} \quad (r_1 = |q_0+h-q|)$$

*) Le résultat formulé porte le nom de théorème de G. Giraud (cf. S. Mikhline [5]) que l'on peut considérer comme la généralisation du théorème de Plemelj-Privalov (§ 2).

nous obtenons les estimations

$$\left| \int\limits_{r<2|h|} K(q_0, q)\,[u(q)-u(q_0)]\,dS_q \right| < C \int\limits_{r<2|h|} r^{\alpha-2}\,dS_q = C_1 |h|^{\alpha},$$

$$\left| \int\limits_{r<2|h|} K(q_0+h, q)\,[u(q)-u(q_0+h)]\,dS_q \right| < \tag{7.8}$$

$$< C \int\limits_{r<2|h|} r_1^{\alpha-2}\,dS_q < C \int\limits_{r_1<3|h|} r_1^{\alpha-2}\,dS_q = C_2 |h|^{\alpha}.$$

Pour calculer les intégrales étendues à la surface utilisons la transformation identique

$$[u(q)-u(q_0+h)]\,K(q_0+h, q) - [u(q)-u(q_0)]\,K(q_0, q) =$$
$$= [u(q)-u(q_0+h)]\,[K(q_0+h, q) - K(q_0, q)] -$$
$$- [u(q_0+h) - u(q)]\,K(q_0, q).$$

En vertu de la condition (7.3) l'intégrale du second terme disparaît. Des conditions du théorème vient l'estimation

$$|K(q_0+h, y) - K(q_0, y)| < \frac{C_3}{|q_0'-q|^3},$$

où $q_0'$ est un certain point situé entre $q_0$ et $q_0+h$. Comme $|q_0'-q| > r - |h|$ et comme dans le domaine d'intégration $r \geqslant 2h$, alors $|q_0'-q| > r/2$; mais puisque la fonction $u(q)$ vérifie la condition H-L d'indice $\alpha$, on a

$$|u(q)-u(q+h)|\,|K(q_0+h, q) - K(q_0, q)| <$$
$$< \frac{C_4 |h|\,|q_0+h-q|^{\alpha}}{r^3} \leqslant \frac{C_4 |h|\,(r+|h|)^{\alpha}}{r^3}.$$

Compte tenu de ces inégalités et de l'inégalité de Hölder $(r+|h|)^{\alpha} < r^{\alpha} + |h|^{\alpha}$ (cf. S. Sobolev [2]), nous obtenons en définitive

$$|u(q)-u(q+h)|\,|K(q_0+h, q) - K(q_0, q)| < C_4 \frac{|h|}{r^{3-\alpha}} + C_4 \frac{|h|^{\alpha+1}}{r^3}.$$

Utilisant l'inégalité précédente nous aboutissons à l'estimation suivante pour l'intégrale étendue à la surface de l'anneau:

$$\left| \int\limits_{2|h|<|q_0-q|<\delta-|h|} [K(q_0+h, q) - K(q_0, q)]\,[u(q)-u(q_0+h)]\,dS_q \right| <$$

$$< C_5 |h| \int\limits_{2|h|}^{\delta-|h|} \frac{dr}{r^{2-\alpha}} + C_6 |h|^{\alpha+1} \int\limits_{2|h|}^{\delta-|h|} \frac{dr}{r^2} < C_7 |h|^{\alpha}.$$

Nous pouvons ainsi estimer le théorème de Giraud démontré.

Arrêtons-nous sur une question auxiliaire. Dans des conditions définies (cf. S. Sobolev [3]) la dérivée par rapport au paramètre de l'intégrale impropre se représente sous la forme d'une intégrale de la dérivée par rapport au noyau. On étudie plus bas un cas spécial où l'intégrale obtenue est une intégrale singulière.

Considérons l'intégrale impropre

$$v(q_0) = \int_{\Pi} \frac{f(q_0, \theta)}{r} u(q)\, dS_q.$$

Supposons que la fonction $u(q)$ vérifie les conditions formulées plus haut et que la fonction $f(q_0, \theta)$ admet des dérivées par rapport aux coordonnées cartésiennes du point $q_0$ et par rapport à l'angle $\theta$ qui vérifient la condition H-L. Nous avons

$$\frac{\partial v}{\partial x_k^0} = \frac{\partial}{\partial x_k^0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r > \varepsilon} \frac{f(q_0, \theta)}{r} u(q)\, dS_q \quad (k = 1, 2) \tag{7.9}$$

($x_1^0$, $x_2^0$ et $x_1$, $x_2$ sont les coordonnées cartésiennes respectivement des points $q_0$ et $q$). Nous avons l'identité

$$\frac{\partial}{\partial x_k^0} \int_{r > \varepsilon} \frac{f(q_0, \theta)}{r} u(q)\, dS_q =$$
$$= \int_{r > \varepsilon} \frac{\partial}{\partial x_k^0} \left[ \frac{f(q_0, \theta)}{r} \right] u(q)\, dS_q - \int_{r = \varepsilon} \frac{f(q_0, \theta)}{r} \frac{\partial r}{\partial x_k^0} u(q)\, dL.$$

Les deux intégrales de droite convergent uniformément vers leur limite lorsque $\varepsilon \to 0$. Aussi peut-on intervertir dans (7.9) l'ordre de dérivation et de passage à la limite. Nous obtenons alors l'égalité recherchée

$$\frac{\partial}{\partial x_k^0} \int_{\Pi} \frac{f(q_0, \theta)}{r} u(q)\, dS_q = \int_{\Pi} \frac{\partial}{\partial x_k^0} \left[ \frac{f(q_0, \theta)}{r} \right] u(q)\, dS_q -$$
$$- u(q_0) \int_{r = \varepsilon} f(q_0, \theta) \frac{\partial r}{\partial x_k} dL \quad \left( \cos(r, x_k) = \frac{\partial r}{\partial x_k} \right). \tag{7.10}$$

De même qu'en théorie des équations singulières unidimensionnelles en théorie des équations bidimensionnelles (et en général multidimensionnelles), la question de la composition de deux intégrales singulières joue un rôle important. Commençons par étudier la composition d'intégrales singulière et régulière.

Soit comme auparavant $v(q)$ une intégrale singulière

$$v(q_0) = \int_{\Pi} \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} u(q_1)\, dS_{q_1},$$

et $w(q)$ une intégrale régulière

$$w(q_0) = \int_{\Pi} \frac{f_1(q_0, q)}{r^{\gamma}} u(q)\, dS_q,$$

où $f_1(q_0, q)$ est une fonction bornée, $\gamma < 2$. Passons à l'étude de l'intégrale itérée

$$w(q_0) = \int_{\Pi} \frac{f_1(q_0, q)}{r^{\gamma}(q_0, q)}\, dS_q \int_{\Pi} \frac{f(q, \theta)}{r^2(q, q_1)} u(q_1)\, dS_{q_1}. \qquad (7.11)$$

Dans ce qui suit nous désignerons $r(q_0, q)$ par $r$ et $r(q, q_1)$ par $r_1$.

Démontrons que l'on peut modifier l'ordre d'intégration dans l'expression (7.11) et ceci nous conduit à une représentation régulière de la fonction $w(q)$ par $u(q)$. Nous avons

$$w(q_0) = \int_{\Pi} \frac{f_1(q_0, q)}{r^{\gamma}}\, dS_q \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{f(q, \theta)}{r_1^2} u(q_1)\, dS_{q_1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Pi} \frac{f_1(q_0, q)}{r^{\gamma}}\, dS_q \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{f(q, \theta)}{r_1^2} u(q_1)\, dS_{q_1} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Pi} u(q_1)\, dS_{q_1} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{f_1(q_0, q) f(q, \theta)}{r^{\gamma} r_1^2}\, dS_q.$$

Les transformations effectuées ont été possibles du moment que l'intégrale singulière du premier membre de l'égalité tend uniformément vers sa limite. Considérons l'intégrale interne

$$Q(q_0, q_1) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{f_1(q_0, q) f(q, \theta)}{r^{\gamma} r_1^2}\, dS_q =$$

$$= \int_{\Pi} \frac{f_1(q_0, q) f(q, \theta) - f_1(q_0, q_1) f(q_1, \theta)}{r^{\gamma} r_1^2}\, dS_q +$$

$$+ f_1(q_0, q_1) \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{f(q_1, \theta)}{r^{\gamma} r_1^2}\, dS_q. \qquad (7.12)$$

Remarquons que la première intégrale est régulière. Représentons la dernière intégrale sous forme d'intégrale itérée en coordonnées polaires:

$$\int_{L} f(q_1, \theta)\, dL \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr_1}{r^{\gamma} r_1}.$$

Opérons dans l'intégrale interne le changement de variables $r_1 = r_2 t$ où $r_2$ est la distance de $q_0$ à $q_1$. Désignons par $\psi$ l'angle $qq_0q_1$.

Alors

$$\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dr_1}{r^{\gamma} r_1} = \frac{1}{r_2^{\gamma}} \int_{\varepsilon/r_2}^{\infty} \frac{dt}{t\,(1+t^2-2t\cos\psi)^{\gamma/2}} = \frac{1}{r_2^{\gamma}} \left[\ln \frac{r_2}{\varepsilon} + B(r_2, \psi)\right] + O(\varepsilon),$$

où $B(r_2, \psi)$ est une fonction bornée. Par conséquent, la fonction $Q(q_0, q_1)$ présentera une singularité d'ordre $r_2^{-\gamma}$, ce qu'il fallait démontrer.

On obtient un résultat analogue quand la composition est effectuée dans l'ordre inverse. Considérons maintenant deux intégrales

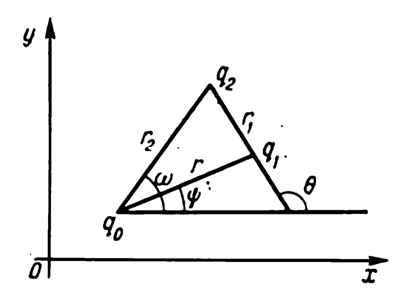



Fig. 4. Schéma de disposition des points dans le plan.

singulières (voir les notations sur la fig. 4)

$$\begin{aligned} v(q_0) &= \int_{\Pi} K_1(q_0, q_1)\, u(q_1)\, dS_{q_1}, \\ w(q_0) &= \int_{\Pi} K_2(q_0, q_1)\, v(q_1)\, dS_{q_1}. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Etudions tout d'abord un cas particulier. Soit $K_1(q_0, q) = e^{in\psi}/r^2$, $K_2(q_0, q) = \cos\psi/r^2$, $n$ est entier. La formule (7.10) permet de récrire la seconde intégrale de (7.13) sous la forme

$$w(q_0) = \int_{\Pi} v(q_1) \frac{\cos\psi}{r^2}\, dS_{q_1} = -\frac{\partial}{\partial x_i^0} \int_{\Pi} \frac{v(q_1)}{r}\, dS_{q_1} \quad (i = 1 \text{ ou } 2).$$

Donc

$$w(q_0) = -\frac{\partial}{\partial x_i^0} \int_{\Pi} \frac{1}{r}\, dS_{q_1} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{r_1 > \varepsilon} u(q_2) \frac{e^{in\theta}}{r_1^2}\, dS_{q_2}.$$

Intervertissant les opérations d'intégration et le passage à la limite, nous obtenons

$$w(q_0) = -\frac{\partial}{\partial x_i^0} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Pi} u(q_2)\, dS_{q_2} \int_{r_1 > \varepsilon} \frac{e^{in\theta}}{r r_1^2}\, dS_{q_1}.$$

Transformons l'intégrale interne:

$$\int\limits_{r_1>\varepsilon} \frac{e^{in\theta}}{rr_1^2}\, dS_{q_1} = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \left\{ \frac{1}{r_2} \ln \frac{r_2}{\varepsilon} + \frac{1}{r_2} \ln \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\varepsilon \cos(\theta - \omega)}{r_2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sqrt{1 - 2\frac{\varepsilon}{r_2} \cos(\theta - \omega) + \frac{\varepsilon^2}{r_2^2}} \right) - \frac{2}{r_2} \ln \left| \sin \frac{\theta - \omega}{2} \right| \right\} d\theta.$$

En portant cette expression dans la formule de $w(q_0)$, on obtient, compte tenu du fait que $\varepsilon \to 0$, la formule

$$w(q_0) = 2 \frac{\partial}{\partial x_i^0} \int\limits_{\Pi} \frac{u(q_2)}{r_2}\, dS_{q_2} \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \ln \left| \sin \frac{\theta - \omega}{2} \right| d\theta. \qquad (7.14)$$

L'intégrale interne de (7.14) peut être calculée sous forme explicite

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{in\theta} \ln \left| \sin \frac{\theta - \omega}{2} \right| d\theta = \mp \frac{\pi e^{in\omega}}{n},$$

où le signe supérieur correspond à $n > 0$ et le signe inférieur à $n < 0$. On obtient alors

$$w(q_0) = \mp \frac{\partial}{\partial x_i^0} \frac{2\pi}{n} \int\limits_{\Pi} u(q_1) \frac{e^{in\psi}}{r}\, dS_q. \qquad (7.15)$$

La différentiation (conformément à (7.10)) conduit à la solution du problème de composition des intégrales singulières considérées:

$$w(q_0) = \begin{cases} \pm 2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{in\psi}}{nr^2} (\cos\psi + in \sin\psi)\, dS_{q_1} & (n \neq \pm 1), \\ 2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{2i\psi}}{r^2}\, dS_{q_1} - 2\pi^2 u(q_0) & (n = 1), \\ 2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{-2i\psi}}{r^2}\, dS_{q_1} - 2\pi^2 u(q_0) & (n = -1). \end{cases} \qquad (7.16)$$

Pour les noyaux $K_1(q_0, q)$ et $K_2'(q_0, q) = i \sin\psi/r^2$ des raisonnements analogues conduisent aux formules

$$w(q_0) = \begin{cases} \pm 2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{in\psi}}{nr^2} (i \sin\psi + n \cos\psi)\, dS_{q_1} & (n \neq \pm 1), \\ 2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{2i\psi}}{r^2}\, dS_{q_1} + 2\pi^2 u(q_0) & (n = 1), \\ -2\pi \int\limits_{\Pi} u(q_1) \dfrac{e^{-2i\psi}}{r^2}\, dS_{q_1} - 2\pi^2 u(q_0) & (n = -1). \end{cases} \qquad (7.17)$$

Introduisons pour l'opérateur singulier spécial la notation

$$h_n u = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \frac{e^{in\psi}}{r^2} u(q_1)\, dS_{q_1},$$

dans ce qui suit nous omettrons l'indice « 1 ». Avec les notations adoptées, les formules (7.16) et (7.17) (en ajoutant et retranchant) peuvent être mises sous une forme équivalente

$$\begin{gathered} hh_n u = \pm \frac{n+1}{n} h_{n+1} u, \\ h_{-1} h_n u = \pm \frac{1-n}{n} h_{n-1} u \quad (n \neq \pm 1), \\ h_{-1} h u = -u, \quad hh_{-1} u = -u. \end{gathered} \tag{7.18}$$

De ces formules découlent les égalités

$$h_{-1} u = h^{-1}, \quad h_2 = \frac{1}{2} h^2 u.$$

Il est aisé d'établir par induction la loi générale

$$h_n u = \frac{1}{n} h^n u, \quad h_{-n} u = \frac{(-1)^n}{n} h^{-n} u \quad (n > 0). \tag{7.19}$$

Il s'avère commode pour la suite d'introduire un nouvel opérateur élémentaire $\tilde{h} = \frac{1}{i} h$. Toutes les formules précédentes se transforment alors de façon évidente. Citons-en certaines qui seront importantes pour la suite :

$$\tilde{h}_n u = \frac{i^n}{n} \tilde{h}^n u, \quad \tilde{h}_{-n} u = \frac{i^{-n}}{n} \tilde{h}^{-n} u \quad (n > 0). \tag{7.20}$$

L'utilité du changement de variables effectué apparaîtra plus tard quand on introduira la notion de symbole de l'opérateur (voir (7.28)). Nous conviendrons d'omettre dans ce qui suit le tilde.

Considérons maintenant l'opérateur singulier

$$Au = a_0(q_0)\, u(q_0) + \int_{\Pi} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_1, \quad K(q_0, q) = f(q_0, \theta)/r^2. \tag{7.21}$$

Nous supposerons que le coefficient $a_0(q)$ est borné et appartient à la classe H-L. Développons la caractéristique $f(q_0, \theta)$ en série de Fourier *)

$$f(q_0, \theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' b_n(q_0)\, e^{in\theta}. \tag{7.22}$$

*) L'absence du terme zéro est due à (7.4).

Nous admettrons que la caractéristique vérifie la condition

$$\int_0^{2\pi} |f^2(q_0, \theta)d\theta| < C. \tag{7.23}$$

Il découlera alors de la théorie de Fourier (cf. par exemple D. Jackson *[1]) que cette série converge en moyenne.

L'exposé précédent permet de mettre le terme singulier de (7.21) sous forme d'une série:

$$\int_\Pi u(q) \frac{f(q_0, \theta)}{r^2} dS_q = \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' a_n(q) h^n u, \tag{7.24}$$

$$a_n(q) = \frac{2\pi b_n(q) i^n}{n}, \quad a_{-n}(q) = (-1)^n \frac{2\pi b_{-n}(q) i^{-n}}{n}, \quad (n > 0).$$

En incluant également le terme hors intégrale dans cette série nous mettons l'opérateur $A$ sous la forme symbolique

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n h^n u. \tag{7.25}$$

Supposons que soient donnés deux opérateurs singuliers $A_1$ et $A_2$ qui s'écrivent sous forme de développements en séries

$$A_1 u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^1 h^n u, \quad A_2 u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2 h^n u.$$

Revenons au problème de la composition de deux opérateurs de ce genre *). Soit $Q(q)$ une fonction bornée de classe H-L. On peut démontrer que l'égalité

$$h^n(Qu) = Qh^n u + Tu \tag{7.26}$$

est vérifiée. $T$ est ici un opérateur régulier. De la structure des séries (7.25) (compte tenu de la possibilité démontrée plus haut de la transposition des opérateurs réguliers et singuliers) découle alors la formule cherchée pour la composition des opérateurs $A_1$ et $A_2$:

$$A_2 A_1 u = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{k-n}^1(q) a_n^2(q) \right\} h^k u + Tu, \tag{7.27}$$

où $T$ est un opérateur régulier. Notons que la présence dans les opérateurs $A_1$ et $A_2$ d'autres termes réguliers n'implique qu'une modification appropriée de l'opérateur $T$.

---

**) Dans ce qui précède ce problème n'a été considéré que pour les opérateurs élémentaires seulement.

Introduisons la notion de symbole de l'opérateur singulier $A$ (7.21) (due à S. Mikhline). On appelle *symbole* la fonction à valeurs complexes $\Phi(q_0, \lambda)$ définie par la série

$$\Phi(q, \lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q) e^{in\lambda} \quad (-\pi < \lambda < \pi). \tag{7.28}$$

La notion de symbole peut être étendue à des opérateurs de forme plus générale $A' = A + T$ ($T$ est un opérateur complètement continu). On appellera symbole de l'opérateur $A'$ le symbole de l'opérateur $A$. Il est évident que, défini de la sorte, le symbole de l'opérateur singulier ne dépend pas des termes réguliers et dans ce qui suit nous allons leur associer, pour faciliter l'exposé, un symbole égal à zéro. Ainsi, à la somme des opérateurs singuliers correspondra désormais la somme des symboles, à leur composition le produit des symboles.

Remarquons que les coefficients de Fourier de la caractéristique coïncident en module avec les coefficients de Fourier de la dérivée $\partial\Phi/\partial\lambda$, de sorte que l'on a l'identité

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^2(q_0, \theta)| d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right|^2 d\lambda, \tag{7.29}$$

d'où découle, compte tenu de la contrainte (7.23), l'inégalité

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\partial\Phi}{\partial\lambda} \right|^2 d\lambda < C.$$

La formule (7.28) permet de définir le symbole de l'opérateur singulier d'après la caractéristique de l'intégrale singulière à partir de son développement en série de Fourier. On a pu trouver la somme de cette série et ceci nous a conduits à l'établissement du lien explicite existant entre ces fonctions:

$$\Phi(q, \lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda-\pi}^{\lambda} \left[ \ln \frac{1}{\sin(\lambda-\theta)} + i\frac{\pi}{2} \right] f(q, \theta)\, d\theta + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\pi} \left[ \ln \frac{1}{\sin(\lambda-\theta)} - i\frac{\pi}{2} \right] f(q, \theta)\, d\theta. \tag{7.30}$$

Considérons à titre d'exemple l'opérateur élémentaire $h$. Son symbole est égal à $e^{i\lambda}$. L'opérateur $h^* = h^{-1}$ est conjugué de $h$. Il suffit, en effet, pour construire l'opérateur conjugué de changer de place les points $q_0$ et $q$ dans le noyau et de le remplacer par son conjugué complexe. Par conséquent, dans le cas considéré les symboles de l'opérateur initial et de l'opérateur conjugué sont des

fonctions conjuguées complexes. La représentation (7.25) permet d'étendre cette conclusion au cas général.

Jusqu'à présent nos raisonnements concernaient l'espace H-L. Montrons qu'on peut passer à l'espace des fonctions de carré sommable ($L_2$). Calculons dans cet espace les normes $hu$ et $h^{-1}u$ ($u$ est comme auparavant de classe H-L). Considérons l'intégrale

$$I = \int_{\Pi} \overline{v(q)}\, v(q)\, dS_q, \quad v(q) = hu = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \frac{e^{i\psi_{01}}}{r^2} u(q)\, dS_q. \tag{7.31}$$

Intervertissons dans le second membre de (7.31) l'ordre d'intégration et des notations simultanément. Nous obtenons alors

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} u(q_0)\, dS_{q_0} \int_{\Pi} \frac{\overline{v(q_1)}\, e^{i\psi_{01}}}{r^2}\, dS_{q_1}.$$

Comme

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \overline{v(q_1)} \frac{e^{i\psi_{01}}}{r^2}\, dS_q = h\bar{v},$$

nous aurons

$$\overline{v(q)} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \overline{u(q_1)} \frac{e^{-i\psi_{01}}}{r^2}\, dS_{q_1} = -h^1\bar{u}.$$

Donc

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Pi} \overline{v(q_1)} \frac{e^{i\psi_{01}}}{r^2}\, dS_{q_1} = -\overline{u(q_0)}.$$

D'où on obtient

$$I = \int_{\Pi} |v|^2\, dS_q = \int_{\Pi} |u|^2\, dS_q.$$

Etendons les opérateurs singuliers à l'espace $L_2$. Supposons que la fonction $u(q)$ est de carré sommable. Alors on peut choisir une suite de fonctions $u_n(q)$ de classe H-L qui converge en moyenne:

$$\lim_{n\to\infty} u_n(q) = u(q).$$

Posons maintenant

$$hu = \lim_{n\to\infty} hu_n, \quad h^{-1}u = \lim_{n\to\infty} h^{-1}u_n$$

et d'une manière analogue pour tous les degrés des opérateurs $h$ et $h^{-1}$. Ainsi la norme de l'opérateur $h$ dans l'espace $L_2$ est égale à 1. On calcule de la même façon la norme de l'opérateur $h^{-1}$, qui s'avère aussi égale à 1.

On définit finalement l'opérateur singulier (dans l'espace $L_2$) sous forme de la série

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q)\, h^n u.$$

Il sera très important pour ce qui suit d'établir les conditions suffisantes imposées à la caractéristique de l'opérateur singulier pour lesquelles il sera borné dans $L_2$. Supposons que la caractéristique de l'opérateur vérifie la condition (7.23). (Les constructions citées plus bas ont été communiquées aux auteurs par S. Mikhline.) Nous avons

$$Au = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(q_0)\, h^n u = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(q_0) \cdot \frac{1}{n}\, h^n u. \qquad (7.32)$$

Passons au calcul de la norme $\| Au \|$ en utilisant la partie de droite de (7.32):

$$\| Au \|^2 = \int_{\Pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} n a_n(q_0) \frac{1}{n} h^n u \right|^2 dq_0 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\Pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |a_n(q_0)|^2 \right\} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} |h^n u|^2 \right\} dq_0 \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{q_0} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |a_n(q_0)|^2 \int_{\Pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} |h^n u|^2 dq_0.$$

Désignons l'expression hors intégrale par la constante $C_0$, intervertissons l'ordre de sommation et d'intégration, il vient:

$$\| Au \|^2 \leqslant C_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\Pi} |h^n u|^2 dq_0 = C_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2} \| h^n u \|^2.$$

Utilisant maintenant le fait que les normes des opérateurs $h$ et $h^{-1}$ sont égales à 1, nous obtenons

$$\| Au \|^2 < C_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} \| u \|^2 = C_0 \| u \|^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{3} C_0 \| u \|^2.$$

De la définition des fonctions $a_n(q)$ (voir (7.24)) découlent les égalités

$$n^2 |a_n(q_0)|^2 = 4\pi^2 |b_n(q_0)|^2.$$

Sommons sur $n$ et utilisons l'égalité de Parseval

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |a_n(q_0)|^2 = 4\pi^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |b_n(q_0)|^2 = 4\pi^2 \int_{-\pi}^{\pi} |f(q_0, \theta)|^2 d\theta.$$

Nous obtenons une estimation de la constante $C_0$ (au moyen de la constante figurant dans (7.23)). On peut ainsi considérer avoir prouvé que l'opérateur $A$ est borné.

Arrêtons-nous sur la question de la transformation du symbole lors d'un changement de coordonnées (I. Itskovitch [1]). Supposons qu'en chaque point $q_0$ on a modifié l'origine du décompte de l'angle $\theta$ de telle sorte que $\theta = \theta_1 + \alpha(q_0)$ (où $\alpha(q_0)$ est une certaine fonction continue). Alors la caractéristique est aussi modifiée:

$$f(q_0, \theta) = f(q_0, \theta_1 + \alpha) = f_1(q_0, \theta_1).$$

Suivons le changement que subira dans ce cas le symbole. Supposons qu'à la caractéristique $f(q_0, \theta)$ correspond le symbole $\Phi(q_0, \lambda)$ et à la caractéristique $f_1(q_0, \theta)$ le symbole $\Phi_1(q_0, \lambda)$. Pour un nou veau système de décompte des angles et pour une valeur $\theta = \theta_1 + \alpha$ nous obtenons conformément à (7.30) l'expression du symbole $\Phi_1(q_0, \lambda)$ sous la forme

$$\Phi_1(q_0, \lambda) = \int_{\lambda+\alpha-\pi}^{\lambda+\alpha} \ln \frac{1}{\sin(\lambda+\alpha-\theta)} [f(q_0, \theta) + f(q_0, \theta+\pi)]\, d\theta + \\ + i\frac{\pi}{2} \int_{\lambda+\alpha-\pi}^{\lambda+\alpha} [f(q_0, \theta) - f(q_0, \theta+\pi)]\, d\theta = \Phi(q_0, \lambda+\alpha)$$

On en conclut que l'ensemble des valeurs du symbole est invariant par rapport à la procédure de mesure des angles, autrement dit est invariant par rapport au changement de variables.

Plus haut la surface d'intégration était partout un plan $\Pi$. Passons maintenant au cas d'une surface fermée de Liapounov $S$.

Pour définir la valeur de l'intégrale singulière procédons de la manière suivante: s'étant donné un nombre $\varepsilon$, notons par $\sigma_\varepsilon$ le voisinage du point $q_0$ situé à l'intérieur de la sphère de rayon $\varepsilon$ *). $S$ étant une surface de Liapounov, on peut appliquer biunivoquement (pour un $\varepsilon$ suffisamment petit) le domaine $\sigma_\varepsilon$ sur une certaine portion du plan (que nous noterons dans ce qui suit $D$) et cela de sorte qu'en ce point $q_0$ la transformation soit conforme. On peut, par exemple,

*) On peut également définir ce domaine par un cylindre circulaire dont l'axe coïncide avec la normale à la surface au point $q_0$.

effectuer une projection orthogonale du domaine $\sigma_\varepsilon$ sur le plan tangent au point $q_0$. Désignons les projections des points $q_0$ et $q$ par $q_0'$ et $q'$.

Compte tenu de ce qui a été dit, l'expression sous le signe somme s'écrit

$$K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q = K'(q_0', q')\, v(q')\, dS_{q'}, \quad u(q) = v(q'),$$

où la fonction $K'(q_0', q')$ admet la représentation

$$K'(q_0', q') = \frac{f(q_0', \theta)}{r^2} + \frac{f_0(q_0', q')}{r^\mu} \quad (\mu < 2),$$

dans laquelle la fonction $f_0(q_0', q')$ est bornée.

Posons par définition

$$\int_S u(q)\, K(q_0, q)\, dS_q =$$
$$= \int_{S-\sigma_\varepsilon} u(q)\, K(q_0, q)\, dS_q + \int_D \frac{f(q_0', \theta)}{r^2}\, dS_{q'} + \int_D \frac{f_0(q_0', q')}{r^\mu}\, dS_{q'}. \qquad (7.33)$$

Identifions le symbole de l'opérateur singulier (7.33) au symbole associé à la caractéristique $f(q, \theta)$ *). Les résultats exposés précédemment restent alors en vigueur.

## § 8. Equations intégrales singulières bidimensionnelles

Considérons l'équation intégrale singulière

$$Au = a_0(q_0)\, u(q_0) + \int_\Pi K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q +$$
$$+ \int_\Pi K_1(q_0, q)\, u(q)\, dS_q = F(q_0) \quad (Au = A'u + Tu = F), \qquad (8.1)$$

où les fonctions $a_0(q)$ et $F(q)$ appartiennent à la classe H-L, le noyau $K(q_0, q)$ est de la forme $f(q_0, \theta)/r^2$, le noyau $K_1(q_0, q)$ est régulier. Supposons également que la caractéristique $f(q_0, \theta)$ vérifie la condition (7.23).

De même que pour le cas des équations singulières unidimensionnelles, l'étude du cas bidimensionnel s'appuie sur la procédure de régularisation qui consiste à ramener l'équation initiale à une équation de Fredholm par application d'un opérateur singulier spéciale-

*) Remarquons que les points $\theta$ parcourent un cercle unité situé dans le plan tangent.

ment choisi (nous le notons ici $B$) à ses deux membres. Cet opérateur de régularisation doit être borné et admettre un symbole continu et borné.

Adoptons une contrainte de grande importance pour la suite en posant que le symbole de l'opérateur $A$ — s'identifiant à la fonction $\Phi(q_0, \lambda)$ — ne s'annule pas pour aucune combinaison de $q_0$ et $\lambda$, y compris $q_0 = \infty$. La fonction

$$\Phi'(q_0, \lambda) = \frac{1}{\Phi(q_0, \lambda)} \tag{8.2}$$

est alors bornée, continue et il est aisé de vérifier qu'elle admet une dérivée vérifiant la condition

$$\int \left| \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \right|^2 d\lambda < C.$$

Considérons $\Phi'(q_0, \lambda)$ comme le symbole d'un certain opérateur singulier. L'expression explicite de sa caractéristique peut être obtenue par développement du symbole $\Phi'(q_0, \lambda)$ en série de Fourier, suivi de la détermination des coefficients de la caractéristique à partir de (7.24). On peut montrer que la caractéristique vérifiera la condition (7.23) (avec une valeur de constante autre, bien entendu, que pour la caractéristique $f(q_0, \lambda)$). L'opérateur ainsi introduit sera donc un opérateur de régularisation. En vertu des propriétés démontrées plus haut du symbole de composition, le symbole de l'opérateur

$$BA = BA' + BT$$

sera égal à 1 (l'opérateur $BT$ est complètement continu) et c'est pourquoi l'équation

$$BAu = BF$$

est une équation de Fredholm.

On appellera, comme auparavant (comme au § 4), indice la différence des nombres de solutions linéairement indépendantes de l'équation initiale et de son associée. Utilisant les principaux points de la conclusion du § 4 on peut montrer que l'équation $Au = F$ est résoluble quand son second membre est orthogonal à toutes les solutions de l'équation associée.

La régularisation ainsi réalisée ne sera pas généralement équivalente. Toutefois on peut montrer dans une série de cas qu'il est possible de choisir pour l'opérateur de régularisation un terme régulier complémentaire tel que l'équivalence ait lieu. Commençons la démonstration par l'équation la plus simple

$$a^1(q_0)\, u(q_0) - \int_{\Pi} \frac{e^{i\psi}}{r^2} u(q)\, dS_q = F(q_0), \quad [a^1(q) - h]\, u = F(q_0). \tag{8.3}$$

La condition de l'inégalité du symbole à zéro signifie pour l'équation (8.3) que l'inégalité $|a^1(q)| \neq 1$ est vérifiée. La continuité du coefficient $a^1(q)$ entraîne $|a^1(q)| < 1$ ou $|a^1(q)| > 1$. Supposons que $|a^1(q)| > 1$. Représentons alors l'équation (8.3) sous la forme

$$u(q) = \frac{1}{a^1(q)} hu + \frac{F(q)}{a^1(q)}. \qquad (8.4)$$

On peut résoudre cette équation par la méthode des approximations successives, ce qui conduit à la représentation de la solution sous la forme

$$u(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{h}{a^1(q)}\right]^n \frac{F(q)}{a^1(q)} = [a^1(q) - h]^{-1} F(q) + T_1^* F, \qquad (8.5)$$

où

$$T_1^* F = \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[\frac{h}{a^1(q)}\right]^n - \frac{h^n}{[a^1(q)]^n}\right\} \frac{F(q)}{a^1(q)}.$$

Si le second membre inclut en outre un opérateur régulier (transporté préalablement du premier membre), alors l'expression (8.5) représentera une équation de Fredholm équivalente à l'équation initiale.

Soit à présent $|a^1(q)| < 1$. En appliquant aux deux membres de l'équation (8.3) l'opérateur $h^{-1}$ on obtient une équation équivalente

$$u(q) = a^1(q) h^{-1} u - h^{-1} F. \qquad (8.6)$$

L'équation (8.6) peut être résolue par la méthode des approximations successives, ce qui en présence d'un opérateur régulier complémentaire conduira à une régularisation équivalente.

Passons à la considération d'un cas plus général quand le symbole de l'opérateur singulier est un polynôme trigonométrique. Dans ce cas l'opérateur peut être mis sous la forme de produit:

$$a_0^1(q) h^m \prod_{k=1}^{n} (a_k^1 - h) u = F(q), \qquad (8.7)$$

où $m$, $n$ sont des nombres entiers, $n > 0$ et $a_k^1$ sont certaines fonctions.

Il découlera maintenant de la non-nullité du symbole les inégalités $|a_k^1(q)| \neq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. On voit aisément que l'équation (8.7) se ramène à une équation équivalente de Fredholm au moyen de l'opérateur dont l'écriture symbolique est

$$\frac{1}{a_0^1(q)} h^{-m} \prod_{k=1}^{n} \{[a_k^1(q) - h]^{-1} + T_k'^*\}, \qquad (8.8)$$

où $T_k^*$ sont des opérateurs complètement continus définis conformément à ce qui précède.

Passons au cas général. Représentons l'opérateur $A$ sous forme de série:

$$A = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(q)\, h^k. \tag{8.9}$$

Puisque le symbole de l'opérateur $A$ est supposé non nul, il existera un grand nombre $n$ tel que l'opérateur

$$A_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k(q)\, h^k$$

admettra un symbole non nul, et par conséquent existera un opérateur de régularisation $B_n$ qui lui correspond.

Il est évident que sont vérifiées les égalités limites

$$\lim_{n\to\infty} \| B_n \| = \| B \|, \quad \lim_{n\to\infty} \| r_n \| = 0,$$

où $r_n$ est la somme des termes restants dans (8.9).

Représentons maintenant l'équation (8.9) sous la forme

$$A_n u = r_n u + F(q).$$

Le développement en facteurs du symbole de l'opérateur $A_n$ permet de déterminer l'opérateur de régularisation $B_n$ (pour un choix approprié d'opérateurs $T_k^*$). On aboutit à l'équation

$$u(q) = B_n(q)\, r_n(q)\, u + F_1(q), \tag{8.10}$$

qui est résoluble par la méthode des approximations successives en raison d'un choix adéquat du nombre $n$ (la signification de la notation $F_1(q)$ est évidente).

On a donc démontré que l'équation intégrale singulière admet une régularisation équivalente si la caractéristique vérifie les conditions formulées, et c'est pourquoi son indice est toujours nul. Notons que le résultat, démontré plus haut, ne s'étend pas automatiquement au cas d'un système d'équations singulières bidimensionnelles (plus en détail à ce sujet cf. plus loin).

La démonstration de l'égalité à zéro de l'indice de l'équation intégrale singulière a été faite pour un plan $\Pi$. Il est difficile de l'étendre au cas d'une surface arbitraire de Liapounov puisqu'on ne peut pas toujours choisir sur la surface un réseau correct de coordonnées et obtenir une représentation unique du symbole, valable pour toute la surface.

Donnons une autre démonstration de la possibilité de régularisation équivalente n'ayant pas le défaut mentionné. Introduisons

ans l'équation singulière (8.1) le paramètre complexe

$$u(q_0) + \nu \int_{\Pi} K(q_0, q)\, u(q)\, dS_q + Tu = F(q_0). \qquad (8.11)$$

Cette équation est normalisée par rapport au coefficient $a_0(q_0)$. A l'équation initiale correspond le nombre $\nu = 1$, à l'équation de Fredholm, $\nu = 0$.

Isolons maintenant dans le plan $\nu$ des domaines dans lesquels la valeur minimale de $|1 - \nu\Psi(q, \lambda)|$ est égale à zéro *) (autrement dit pour chaque $\nu$ pris dans un domaine de cette espèce il existe un couple de valeurs $q_0$ et $\lambda$ pour lesquelles ce minimum est égal à zéro). La partie complémentaire du plan représentera la somme d'un nombre fini ou dénombrable de domaines que nous désignerons par $\delta_j$. Démontrons que dans n'importe lequel des domaines l'indice de l'équation (8.11) reste constant. Dans chacun des domaines le module du symbole est différent de zéro (autrement dit $|1 - \nu\Phi(q, \lambda)| > 0$), et c'est pourquoi il existe un opérateur de régularisation que nous noterons $B_\nu$ (il ne s'agit pas ici de régularisation équivalente). Le symbole d'un tel régularisateur est égal à $[1 - \nu\Phi(q, \lambda)]^{-1}$.

Considérons également l'équation ayant pour paramètre $\nu + \Delta\nu$ (où $\Delta\nu$ est une grandeur suffisamment petite, choisie de telle sorte que $\nu + \Delta\nu$ appartient au même domaine $\delta_j$). Récrivons alors l'équation sous la forme

$$u - \nu K u = Tu + \Delta\nu K u + F.$$

En appliquant à ses deux membres le régularisateur $B$ nous sommes conduits à l'équation

$$u - \Delta\nu L u = B_\nu F + T_1 u,$$

où $T_1$ est un certain opérateur complètement continu. L'opérateur singulier $L$ admet, lui, le symbole $(1 - \nu\Phi)^{-1}$, qui est borné. C'est pourquoi l'on peut rendre, avec un choix approprié de $\Delta\nu$, la norme de l'opérateur $\Delta\nu L$ aussi petite que l'on veut. La dernière équation se ramène alors à une équation équivalente de Fredholm par la méthode des approximations successives. Ceci étant, les indices des opérateurs $I - \nu K$ et $I - (\nu + \Delta\nu) K$ doivent être les mêmes.

L'exposé précédent permet d'établir d'emblée que l'indice est égal à zéro quand la fonction $\Psi(q, \lambda)$ est en valeur absolue strictement inférieure à 1. Il est évident que l'un des domaines $\delta_j$ inclura le cercle $|\nu| < 1 + \varepsilon$. Aussi l'équation aura-t-elle un même indice (nul) pour $\nu = 1$ et $\nu = 0$.

Considérons à présent la question de régularisation équivalente par un procédé valable également dans le cas des surfaces fermées.

*) Dans ce cas la fonction $\Psi(q, \lambda)$ n'est le symbole que du terme singulier seulement.

Ecrivons l'équation singulière initiale sous la forme (par introduction adéquate du paramètre complexe $\nu$)

$$u - \nu (u - Au) + Tu = F. \tag{8.12}$$

Exigeons en outre que le symbole de l'opérateur soit continu en $q$ sur la surface $S$ uniformément par rapport à $\theta$ et qu'il admette des dérivées troisièmes de carré sommable. Nous supposerons également que la fonction $F(q)$ appartient à la classe $L_2$.

Supposons qu'on a dans le plan $\nu_1$ une courbe $L$, avec ses extrémités à zéro et à l'infini, n'ayant pas de points communs avec l'ensemble des valeurs du symbole. Il doit donc exister une constante $\beta$ telle que pour tous les points $q$ et quel que soit $\lambda$ soit vérifiée l'inégalité

$$|\Phi(q, \lambda) - \nu_1| > \beta, \quad \nu_1 \in L. \tag{8.13}$$

Notons $\tilde{L}$ une courbe que l'on obtient de $L$ par la transformation $\nu_1 = (\nu - 1)/\nu$. Il est évident qu'on peut empêcher la courbe $\tilde{L}$ de passer par le point 1 ; la courbe sera alors limitée. Ses extrémités sont les points 0 et 1.

Considérons maintenant l'équation singulière (8.12) en supposant que le point $\nu$ est situé sur la courbe $\tilde{L}$. Démontrons que le symbole de l'équation (8.12) (la fonction $1 - \nu + \nu\Phi$) s'avère borné inférieurement en valeur absolue. En effet, étant donné (8.13), nous avons

$$\left|\frac{1-\nu+\nu\Phi}{\nu}\right| = \left|\Phi(q, \lambda) - \frac{\nu-1}{\nu}\right| \geqslant \beta.$$

Le symbole $\Phi(q, \lambda)$ étant borné, il existe une constante $K > |1 - \Phi|$. Il en résulte pour les valeurs de $|\lambda| \geqslant 1/(2K)$ l'inégalité

$$|1-\nu+\nu\Phi| \geqslant \frac{\beta}{2K}.$$

Si, au contraire $|\lambda| < 1/(2K)$, on a l'inégalité

$$|1 - \nu + \nu\Phi| > 1 - |\nu| K > 1/2.$$

Nous avons établi plus haut que l'indice conserve sa valeur à l'intérieur des domaines $\delta_j$. Ce fait nous conduit à la démonstration de la nullité de l'indice de l'équation initiale, c'est-à-dire de l'équation (8.12) pour $\nu = 1$ (l'équation est une équation de Fredholm pour $\nu = 0$).

Le procédé employé ramène la question de la régularisation équivalente à la démonstration de l'existence de la courbe $L$ ($\tilde{L}$) introduite plus haut. Toutes les considérations étant faites dans l'espace $L_2$, il convient de passer à l'équation

$$(A^* + T^*)(A + T)u = (A^* + T^*)F$$

équivalente à l'équation initiale (cf. § 4). On obtient alors une équation dont le symbole est égal à $|\Phi(q, \lambda)|^2$, et il découlera de la non-nullité de la fonction $\Phi(q, \lambda)$ qu'on peut prendre pour $L$ le demi-axe négatif.

Décrivons le schéma de construction explicite de l'opérateur de régularisation équivalente, mettant à profit le fait que la courbe $\tilde{L}$ est bornée. On a démontré plus haut que $|1 - \nu + \nu\Phi| > 0$. On en tire que l'opérateur ayant pour symbole $\frac{1-\Phi(q, \lambda)}{1-\nu+\nu\Phi(q, \lambda)}$ est borné par une certaine constante $C$ ne dépendant pas de $\nu$ et par conséquent $C \geqslant \| I - A \|$. Soit $|\nu_0| = 1/(2C)$. L'opérateur $[I - \nu_0 (I - A)]^{-1}$ sera alors borné. En appliquant cet opérateur aux deux membres de l'équation (8.12) nous sommes conduits à une équation équivalente admettant le symbole

$$\frac{1-\nu+\nu\Phi}{1-\nu_0+\nu_0\Phi} = 1 - \frac{(\nu-\nu_0)(1-\Phi)}{1-\nu_0+\nu_0\Phi}.$$

Appliquant aux deux membres de la nouvelle équation un opérateur de symbole $(1 - \nu_0 + \nu_0\Phi)(1 - \nu_1 + \nu_1\Phi)^{-1}$, avec $|\nu_1 - \nu_0| \leqslant 1/(2C)$ nous sommes conduits à une équation équivalente admettant pour symbole

$$1 - \frac{(\nu-\nu_1)(1-\Phi)}{1-\nu_1+\nu_1\Phi}.$$

Répétant le processus, nous aboutissons après le $k$-ième pas à une équation de symbole

$$1 - \frac{(\nu-\nu_k)(1-\Phi)}{1-\nu_k+\nu_k\Phi}.$$

Choisissant $k$ suffisamment grand, on peut faire $\nu_k = 1$, ce qui était exigé.

La théorie développée ci-dessus peut être étendue aux systèmes d'équations singulières. Considérons les systèmes de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}u_k = F_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n), \tag{8.14}$$

$$A_{jk}u_k = a_{jk}(q_0)\, u_k(q_0) + \int_S u_k(q) \frac{f_{jk}(q_0, \theta)}{r^2}\, dS_q + T_{jk}u_k,$$

$T_{jk}$ étant des opérateurs complètement continus.

L'extension de la notion de symbole d'un opérateur singulier aux systèmes conduit à la matrice dite *matrice symbolique* $\| \Phi_{jk} \|$. Le déterminant de cette matrice est déterminant symbolique du système (8.14). Nous supposerons que tous les éléments de la matrice symbolique vérifient les mêmes conditions que le symbole d'une seule équation.

On peut montrer que la composition des opérateurs singuliers est réalisée conformément aux règles de l'algèbre matricielle; on effectue dans ce cas la multiplication des matrices symboliques.

Exigeons que le déterminant symbolique soit non nul. Formons alors la matrice ayant pour éléments $\Phi'_{jk} = \Phi^{jk}\Phi^{-1}$ (où $\Phi^{jk}$ est le complément algébrique de $\Phi_{jk}$). On peut montrer que l'opérateur matriciel, dont la matrice symbolique est constituée des éléments $\Phi'_{jk}$, sera opérateur de régularisation pour le système initial (8.14). Abordons la question de la régularisation équivalente. Soit la matrice symbolique

$$\Phi(q, \lambda) = E - \Psi(q, \lambda).$$

Supposons que les nombres caractéristiques de la matrice $\Psi(q, \lambda)$ sont en valeur absolue inférieurs à 1 pour tous les $q$ et $\lambda$. Isolons du plan $\nu$ les domaines $\delta_j$ aux points desquels les nombres caractéristiques de la matrice $E - \nu\Psi(q, \lambda)$ sont différents de zéro. En répétant les raisonnements relatifs au cas d'une seule équation on peut montrer que ces domaines seront également des domaines d'indice constant. Il résultera alors de la contrainte imposée aux nombres caractéristiques que le cercle $|\nu| < 1 + \varepsilon$ est situé dans l'un de ces domaines. Par conséquent, l'indice du système initial ($\nu = 1$) est nul.

A la différence du cas d'une seule équation, la non-annulation de la matrice symbolique n'assure en général pas à elle seule une régularisation équivalente. On peut toutefois trouver certaines classes de systèmes d'équations pour lesquelles la régularisation équivalente a lieu. Le point le plus important pour les questions étudiées dans la monographie est que dans ces classes sont inclues les équations intégrales singulières de la théorie de l'élasticité (cf. § 29). Aussi limitons-nous nos raisonnements à ces cas.

Soit dans le plan $\nu_1$ une courbe $L$ réunissant les points 0 et $\infty$ et n'ayant pas de points communs avec l'ensemble des nombres caractéristiques de la matrice $\Phi(q, \lambda)$. Comme dans le cas d'une seule équation, introduisons le paramètre $\nu = 1/(1 - \nu_1)$. Considérons maintenant l'équation

$$u - \nu(I - A)u = F, \tag{8.15}$$

où $I$ est l'opérateur identique. Sa matrice symbolique est de la forme

$$E - \nu(E - \Phi) = \nu(\Phi - \nu_1 E).$$

Démontrons que le déterminant de cette matrice est différent de zéro pour $\nu_1 \in L$ (ou $\nu \in \tilde{L}$). Si le module $|\nu|$ est petit, le déterminant est proche de $|1 - \nu|^n$ ($n$ étant l'ordre du système) et pour un $\xi > 0$ donné on peut choisir une valeur $\eta > 0$ telle que pour

$|\nu| < \eta$ soit vérifiée l'inégalité

$$|\,\|(1-\nu)\,E + \nu\Phi\|\,| > \xi.$$

Soit $|\nu| > \eta$. On a alors

$$|\,\|(1-\nu)\,E + \nu\Phi\|\,| > \eta^n\,|\,\|\nu_1 E - \Phi\|\,| = \eta^n \prod_{k=1}^{n} |\nu_1 - \nu_1^k(q, \lambda)|,$$

où $\nu_1^k$ sont les nombres caractéristiques de la matrice $\Phi$. Comme la courbe $L$ existe, il existe aussi une constante $\gamma$ telle que $|\nu_1 - \nu_1^k(q, \lambda)| \geqslant \gamma$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Définitivement on obtient

$$|\,\|(1-\nu)\,E + \nu\Phi\|\,| \geqslant (\gamma\eta)^k \quad (\nu \in \tilde{L}, \quad |\nu| \geqslant \eta).$$

Aussi peut-on montrer que dans l'espace $L_2$ existe un opérateur borné, dont la matrice symbolique est de la forme

$$[(1-\nu)\,E + \nu\Phi\,(q, \lambda)]^{-1}\,[E - \Phi\,(q, \lambda)].$$

Notons cet opérateur $H_\nu$ et supposons que sa norme est non supérieure à une constante $C$. Dans ce cas $C > \|I - A\|$ et c'est pourquoi, quand $\nu_0 \in \tilde{L}$ et $|\nu_0| \leqslant 1/(2C)$, l'opérateur $[I - \nu_0\,(I - A)]^{-1}$ est borné et son indice nul. En appliquant cet opérateur aux deux membres de l'équation (8.15) nous sommes conduits à une équation équivalente, de matrice symbolique

$$\begin{aligned}(1-\nu_0)\,E + \nu_0\Phi]^{-1}\,[(1-\nu)\,E + \nu\Phi] &= \\ &= E - (\nu - \nu_0)\,[(1-\nu_0)\,E + \nu_0\Phi]^{-1}\,(E - \Phi).\end{aligned}$$

En appliquant aux deux membres de cette équation l'opérateur

$$[I - (\nu_1 - \nu_0)\,H_{\nu_0}]^{-1} \quad \left(\nu_1 \in \tilde{L},\ |\nu_1 - \nu_0| \leqslant \frac{1}{2C}\right),$$

on obtient de nouveau une équation équivalente, dont la matrice symbolique est à présent

$$E - (\nu - \nu_1)\,[(1-\nu_1)\,E + \nu_1\Phi]^{-1}\,(1 - \Phi).$$

Répétons le processus pour l'ensemble des valeurs $\nu_k$ telles que $|\nu_k - \nu_{k-1}| < 1/(2C)$. Choisissant alors $n$ suffisamment grand, nous parvenons à la valeur $\nu_k = 1$ correspondant à l'équation initiale $Au = F$. Par conséquent, les alternatives de Fredholm sont applicables à ce système d'équations singulières, lorsque le déterminant symbolique est différent de zéro et il existe une courbe $L\,(\tilde{L})$ jouissant des propriétés mentionnées. Il est évident qu'une courbe $L$ existe quand la matrice symbolique est hermitienne (donc autoconjuguée), puisque ses nombres caractéristiques sont réels et qu'on peut par conséquent prendre pour $L$ le demi-axe imaginaire.

CHAPITRE II

# MÉTHODES APPROCHÉES DE RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

## § 9. Questions générales de la théorie des méthodes approchées

Les méthodes approchées de résolution des équations intégrales sont en grande partie englobées dans la théorie générale des méthodes approchées, alors que l'étude en détail de l'une ou l'autre de celles-ci n'est liée qu'à l'obtention de quelques estimations seulement. C'est pourquoi nous exposerons la théorie générale dans le volume nécessaire en nous appuyant sur le travail de L. Kantorovitch [2].

Soient $x$ et $y$ des éléments des espaces normés $X$ et $Y$, et $K$ un opérateur linéaire appliquant $X$ dans $Y$. Considérons l'équation fonctionnelle

$$Kx = (E - \lambda H)\, x = y. \tag{9.1}$$

Outre l'équation (9.1) considérons également l'« équation approchée »

$$\overline{K}\overline{x} = (\overline{E} - \lambda\overline{H})\, \overline{x} = \overline{y}, \tag{9.2}$$

où $\overline{x}$, $\overline{y}$ sont des éléments des espaces $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, l'opérateur $\overline{K}$ applique $\overline{X}$ dans $\overline{Y}$, $E$ et $\overline{E}$ sont des opérateurs identités. Les espaces $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont choisis relativement simples dans un certain sens et l'opérateur $\overline{K}$ est supposé proche (aussi dans un certain sens) de l'opérateur $K$.

Par la suite nous démontrerons deux théorèmes permettant de juger de la résolubilité de l'équation (9.2), si l'équation (9.1) est résoluble, et du degré de proximité des solutions de ces équations. Mais pour l'instant considérons les espaces linéaires normés $X$ et $\overline{X}$ tout en supposant $\overline{X}$ complet et isomorphe à un certain sous-espace $X' \subset X$. Supposons que l'isomorphisme est réalisé au moyen de l'opérateur $\varphi_0$ ($X'$ dans $\overline{X}$), admettant l'opérateur inverse continu $\varphi_0^{-1}$. Supposons également qu'il existe un opérateur $\varphi$, appliquant $X$ dans $\overline{X}$ et coïncidant avec $\varphi_0$ sur $X'$.

L'exigence de la « proximité » des équations (9.1) et (9.2) sera représentée sous forme de la condition

$$\| \varphi H x' - \overline{H}\varphi x' \| \leqslant \varepsilon \, \| x' \| \quad (x' \in X'), \tag{9.3}$$

ou sous une autre forme légèrement différente

$$\| \varphi K x' - \overline{K} \varphi x' \| < \varepsilon \, | \lambda | \cdot \| x' \|, \tag{9.3'}$$

où $\varepsilon$ est un nombre positif aussi petit que l'on veut. Supposons que l'opérateur $K$ possède son inverse et la solution de l'équation (9.1) soit $x^* \in X'$. Supposons que l'opérateur $\overline{K}$ possède également son inverse et que la solution de l'équation (9.2) soit $\overline{x}_0$. Démontrons qu'on a alors l'estimation suivante:

$$\| \overline{x}_0 - \varphi x^* \| < \varepsilon \, | \lambda | \cdot \| \overline{K}^{-1} \| \cdot \| x^* \|. \tag{9.4}$$

En effet,

$$\| \overline{K} \varphi x^* - \overline{K} \overline{x}_0 \| = \| \overline{K} \varphi x^* - \varphi K x^* \| < \varepsilon \, | \lambda | \cdot \| x^* \|$$

puisque $\overline{K}\overline{x}_0 = \overline{y} = \varphi y = \varphi K x^*$, d'où nous obtenons

$$\| \varphi x^* - \overline{x}_0 \| = \| \overline{K}^{-1} \overline{K} (\varphi x^* - \overline{x}_0) \| < \varepsilon \, | \lambda | \cdot \| x^* \| \cdot \| \overline{K}^{-1} \|.$$

Exigeons en outre que pour tout élément $x \in X$ existe un élément $x' \in X'$ tel que

$$\| Hx - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \| x \|. \tag{9.5}$$

Passons maintenant à la démonstration des théorèmes.

I. Dans le cas où les deux estimations (9.3), (9.5) sont vérifiées, l'opérateur $K^{-1}$ existe et la constante

$$q = [\| \varphi \| \cdot \| K \| \cdot | \lambda | \, \varepsilon_1 + | \lambda | \, \varepsilon + | \lambda^2 | \, \varepsilon \varepsilon_1] \cdot \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| < 1, \tag{9.6}$$

l'équation (9.2) admet toujours une solution, et en outre

$$\| \overline{x} \| \leqslant \frac{(1 + | \lambda | \, \varepsilon_1) \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \|}{1 - q} \| \overline{y} \|. \tag{9.7}$$

Désignons par $\overline{y}_0$ l'élément $\overline{y}$, et par $y_0$ l'élément $\varphi_0^{-1} \overline{y}_0$. L'indexation choisie est commode pour l'élaboration des approximations successives. Introduisons la notation

$$z = K^{-1} \lambda H y_0. \tag{9.8}$$

Il est évident que

$$Kz = z - \lambda H z = \lambda H y_0, \quad z = \lambda H (z + y_0). \tag{9.9}$$

Pour un $x' \in X'$ tiré de (9.5) cherchons à vérifier l'inégalité

$$\left\| H (z + y_0) - \frac{x'}{\lambda} \right\| < \varepsilon_1 \| z + y_0 \|.$$

Dans ce cas en vertu de (9.9)

$$\| z - x' \| < \varepsilon_1 \, | \lambda | \cdot \| z + y_0 \|. \tag{9.10}$$

Etant donné

$$K(z+y_0) = z + y_0 - \lambda H(z+y_0) = y_0,$$

on a

$$\| z + y_0 \| \leqslant \| K^{-1} \| \cdot \| y_0 \| \tag{9.11}$$

et finalement

$$\| z - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \mid \lambda \mid \| K^{-1} \| \cdot \| y_0 \|. \tag{9.12}$$

Introduisons encore l'élément

$$\bar{x}_1 = \varphi(x' + y_0)$$

et estimons la différence

$$\begin{aligned} \| \bar{K}\bar{x}_1 - y_0 \| \leqslant \| \bar{K}\varphi(x'+y_0) - \varphi K(x'+y_0) \| + \\ + \| \varphi K(x'+y_0) \| + \| \varphi K(x'+y_0) - \varphi y_0 \| = \\ = \| \bar{K}\varphi(x'+y_0) - \varphi K(x'+y_0) \| + \| \varphi\lambda H y_0 - \varphi K x' \|. \end{aligned}$$

De (9.3′) et (9.8) vient alors

$$\| \bar{K}\bar{x}_1 - \bar{y}_0 \| \leqslant \varepsilon \mid \lambda \mid \cdot \| x' + y_0 \| + \| \varphi K z - \varphi K x' \|.$$

Puis, compte tenu de (9.10) et (9.11), nous avons

$$\begin{aligned} \| x' + y_0 \| \leqslant \| z + y_0 \| + \| z - x' \| \leqslant (1 + \varepsilon_1 \mid \lambda \mid) \| K^{-1} \| \times \\ \times \| y_0 \| \leqslant (1 + \varepsilon_1 \mid \lambda \mid) \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{y}_0 \|. \end{aligned} \tag{9.13}$$

Utilisant (9.12) nous sommes conduits à l'estimation

$$\begin{aligned} \| \bar{K}\bar{x}_1 - \bar{y}_0 \| < \varepsilon \mid \lambda \mid (1 + \varepsilon_1 \mid \lambda \mid) \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{y}_0 \| + \\ + \| \varphi \| \cdot \| K \| \varepsilon_1 \mid \lambda \mid \cdot \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{y}_0 \| = \\ = \{ \| \varphi \| \cdot \| K \| \cdot \mid \lambda \mid \varepsilon_1 + \mid \lambda \mid \varepsilon + \mid \lambda^2 \mid \varepsilon\varepsilon_1 \} \times \\ \times \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{y}_0 \| = q \| \bar{y}_0 \|. \end{aligned} \tag{9.14}$$

Donc l'élément $x_1$ vérifie l'équation (9.2) à $q \| \bar{y}_0 \|$ près (précision meilleure que le zéro identique, où le second membre est égal à $\bar{y}_0$).

Appliquons maintenant la méthode des approximations successives. Posons $\bar{y}_1 = \bar{y}_0 - \bar{K}\bar{x}_1$. Alors, compte tenu de (9.14)

$$\bar{K}\bar{x}_1 = \bar{y}_0 - \bar{y}_1, \quad \| \bar{y}_1 \| < q \| \bar{y}_0 \|,$$

et étant donné (9.13)

$$\begin{aligned} \| \bar{x}_1 \| = \| \varphi(x' + y_0) \| \leqslant \\ \leqslant \{ \| \varphi \| (1 + \varepsilon_1 \mid \lambda \mid) \| K^{-1} \| \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \} \| \bar{y}_0 \| = M \| \bar{y}_0 \|. \end{aligned}$$

De même qu'on a déterminé l'élément $\bar{x}_1$ d'après $y_0$, on trouve $\bar{x}_2$ à partir de $y_1$ et on détermine $\bar{y}_2 = \bar{y}_1 - \bar{K}\bar{x}_2$, avec par ailleurs

$$\|\bar{x}_2\| \leqslant M \|y_1\| \leqslant Mq \|\bar{y}_0\|, \quad \|\bar{y}_2\| \leqslant q \|\bar{y}_1\| \leqslant q^2 \|\bar{y}_0\|.$$

D'une manière analogue sont déterminés successivement $\bar{x}_n$ et $\bar{y}_n$:

$$\bar{K}\bar{x}_n = \bar{y}_{n-1} - \bar{y}_n \tag{9.15}$$

qui vérifient les estimations

$$\|\bar{x}_n\| < Mq^{n-1} \|\bar{y}_0\|, \quad \|\bar{y}_n\| \leqslant q^n \|\bar{y}_0\|.$$

Ajoutant les égalités (9.15) nous trouvons

$$\bar{K}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n\right) = \bar{y}_0 - \bar{y}_n;$$

la série $\sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n$ converge puisque $q < 1$. Désignons sa somme par $x$. L'élément $x \in \bar{X}$ puisque l'espace $\bar{X}$ est complet et l'élément $\bar{x}$ vérifie l'équation

$$\bar{K}\bar{x} = \bar{y}_0 = \bar{y} \quad \left(\|\bar{x}\| < \frac{M}{1-q} \|\bar{y}\|\right),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Exigeons en outre que le second membre de l'équation (9.1), à savoir, l'élément $y$, soit susceptible d'approximation par l'élément $y' \in X'$ de telle sorte que

$$\| y - y' \| < \varepsilon_2 \| y \|. \tag{9.16}$$

Définissons conformément à (9.5) un élément $x' \in X'$ tel que

$$\| Hx^* - x' \| \leqslant \varepsilon_1 \| x^* \|.$$

Alors

$$\begin{aligned} \| x^* - (\lambda x' + y') \| &\leqslant \| y - y' \| + \\ &+ | \lambda | \cdot \| x^* - \lambda x' \| < \varepsilon_2 \| y \| + | \lambda | \varepsilon_1 \| x^* \| \leqslant \\ &\leqslant | \lambda | (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \| K \|) \| x^* \| = \eta \| x^* \|. \end{aligned} \tag{9.17}$$

Démontrons le second théorème concernant le problème de la résolubilité de l'équation (9.2) si l'équation (9.1) est résoluble.

II. Si les conditions (9.3), (9.5) et (9.16) sont vérifiées et si l'opérateur $\bar{K}^{-1}$ existe, on a alors l'estimation:

$$\begin{aligned} \| x^* - \varphi^{-1}_0 \bar{x}_0 \| \leqslant & \{2\varepsilon | \lambda | \cdot \| \varphi^{-1}_0 \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \| + \\ & + (\varepsilon_1 | \lambda | + \varepsilon_2 \| K \|) (1 + \| \varphi K \| \cdot \| \varphi^{-1}_0 \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \|)\} \| x^* \| = \\ & = p \| x^* \|, \end{aligned} \tag{9.18}$$

où $\bar{x}_0$ est solution de l'équation (9.2).

En vertu de (9.17) il existe un élément $x' \in X'$ tel que

$$\| x^* - x' \| \leqslant \eta \, \| x^* \|. \tag{9.19}$$

Désignons par $\bar{x}_1$ la solution de l'équation $\bar{K}\bar{x} = \varphi K x'$. $\bar{x}_0$ étant solution de l'équation (9.2), on a

$$\bar{K}\bar{x}_0 = \varphi K x^*, \quad \bar{K}(\bar{x}_0 - \bar{x}_1) = \varphi K (x^* - x'),$$

d'où l'on tire

$$\| \bar{x}_0 - \bar{x}_1 \| \leqslant \| \bar{K}^{-1} \| \cdot \| \varphi K \| \, \eta \, \| x^* \|. \tag{9.20}$$

Puisque $x' \in X'$, on a la condition (9.4):

$$\| \bar{x}_1 - \varphi x' \| < \varepsilon \, | \lambda | \, \| \bar{K}^{-1} \| \cdot \| x' \| \leqslant \varepsilon \, | \lambda | \, (1 + \eta) \, \| \bar{K}^{-1} \| \cdot \| x^* \|,$$

et donc

$$\| \varphi_0^{-1} \bar{x}_1 - x' \| \leqslant \varepsilon \, | \lambda | \, (1 + \eta) \, \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \| \cdot \| x^* \|. \tag{9.21}$$

Mais il suit de (9.20), que

$$\| \varphi_0^{-1} \bar{x}_1 - \varphi_0^{-1} \bar{x}_0 \| \leqslant \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \| \cdot \| \varphi K \| \cdot \| x^* \|. \tag{9.22}$$

Comparant (9.19), (9.21) et (9.22) nous obtenons (l'inégalité étant renforcée par la substitution au nombre $\eta$ de l'unité dans le premier terme):

$$\| x^* - \varphi_0^{-1} \bar{x}_0 \| <$$
$$< \{ 2\varepsilon \, | \lambda | \cdot \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \| + \eta \, (1 + \| \varphi_0^{-1} \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \| \times$$
$$\times \| \varphi K \|) \} \, \| x^* \|.$$

Il en découle l'estimation (9.18), ce qu'il fallait démontrer.

La procédure de construction d'une solution approchée de l'équation opératorielle (9.1) consiste à choisir une famille d'équations opératorielles approchées et à résoudre chacune d'entre elles. La convergence des solutions de ces équations vers la solution exacte est assurée par le fait que le coefficient $p$ (cf. (9.18)) peut être pris aussi petit que l'on veut.

Considérons également un autre problème de la théorie des méthodes approchées: le problème de l'interpolation des fonctions. Supposons qu'en résolvant une équation opératorielle approchée de deuxième espèce on a obtenu une solution dans l'espace $X'$. Mais il faut trouver une solution (approchée) dans l'espace $X$.

Différentes approches sont possibles. On peut, par exemple, utiliser la représentation

$$x = y + \lambda \bar{H} x'. \tag{9.23}$$

On peut utiliser aussi une procédure quelconque d'interpolation, par exemple, une interpolation linéaire par tranches, des polynômes de Lagrange et autres. Nous supposerons, pour fixer les idées, qu'aux nœuds d'un réseau $x_i$ ($i = 0, \ldots, n$, $x_0 = a$, $x_n = b$) donné sur un segment $[a, b]$ d'axe réel sont connues les valeurs d'une certaine fonction $f(x)$, dont les propriétés différentielles sont établies. Le défaut des polynômes de Lagrange, par exemple, est une forte oscillation de la représentation pour un $n$ suffisamment grand.

On utilise largement ces dernières années un nouvel appareil mathématique, la *méthode des splines* (N. Bakhvalov *[1], G. Marchuk *[1]) exempte de ce défaut. Supposons qu'il faut sur le même segment $[a, b]$ trouver une fonction $g(x)$ de classe $C^k$ (c'est-à-dire continue, de même que ses dérivées jusqu'à l'ordre $k$). Cette fonction représente sur chacun des segments $[x_{i-1}, x_i]$ un polynôme de degré $k+1$ :

$$g(x) \equiv g_i(x) = \sum_{l=0}^{k+1} a_l^i (x_i - x)^l \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.24}$$

Aux points $x_i$ du réseau sont vérifiées les égalités

$$g(x_i) = f_i \tag{9.25}$$

ainsi que les conditions aux limites de la forme suivante :

$$g^{(k)}(a) = g^{(k)}(b) = 0. \tag{9.26}$$

La fonction $g(x)$ étant continue et admettant des dérivées d'ordre $k$, on a des égalités supplémentaires aux points $x_i$. Pour plus de simplicité nous nous limiterons dans ce qui suit au cas de splines cubiques. Les conditions mentionnées prennent alors la forme

$$\begin{gathered} g_{i+1}(x_i) = g_i(x_i), \quad g'_{i+1}(x_i) = g'_i(x_i), \\ g''_{i+1}(x_i) = g''_i(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1). \end{gathered} \tag{9.27}$$

Ainsi l'on obtient, pour la détermination des inconnues $a_l^i$, un système d'équations, et la matrice correspondante s'avère tridiagonale

$$\begin{Vmatrix} 2(h_1+h_2) & h_2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \\ h_2 & 2(h_2+h_3) & h_3 & 0 & 0 & \ldots & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & & h_{n-1} & 2(h_{n-1}+h_n) \end{Vmatrix}, \tag{9.28}$$

où $h_i = x_{i+1} - x_i$.

Pour la résolution numérique de ce système il est commode d'appliquer la méthode de passage consistant en le calcul successif des

grandeurs auxiliaires:

$$\beta_i = \begin{cases} -\dfrac{h_2}{2(h_1+h_2)} & (i=1), \\ \dfrac{-h_{i+1}}{2(h_i+h_{i+1})+h_i\beta_{i-1}} & (i>1), \end{cases}$$

$$Z_i = \begin{cases} \dfrac{F_1}{2(h_1+h_2)} & (i=1), \\ \dfrac{F_i-h_iZ_{i-1}}{2(h_i+h_{i+1})+h_i\beta_{i-1}} & (i>1), \end{cases} \qquad (9.29)$$

$$a_2^i = \begin{cases} Z_{n-1} & (i=n-1), \\ \beta_i a_2^{i+1}+Z_i & (1\leqslant i<n-1), \end{cases}$$

où $F_i$ sont les seconds membres du système. Après avoir calculé $a_2^i$ $(i < n-1)$, on détermine les coefficients $a_1^i$ et $a_3^i$ par les formules

$$\begin{aligned} a_1^i &= -\frac{h_3}{3}(a_2^{i-1}+2a_2^i)+\frac{f_{i-1}-f_i}{h_i} \\ a_3^i &= \frac{a_2^{i-1}-a_2^i}{3h_i} \end{aligned} \qquad (i=1, 2, \ldots, n). \qquad (9.30)$$

Les coefficients $A_0^i$ sont tirés d'emblée des égalités (9.25).

Montrons que l'approximation par splines présente certains avantages. Supposons qu'on a une approximation linéaire par tranches. Cette fonction est solution d'un problème aux variations (avec contraintes)

$$\min \Phi(u) = \int_a^b \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx, \quad u(x_i)=f_i \quad (i=0, 1, \ldots, n) \qquad (9.31)$$

dans la classe de fonctions dont les dérivées premières sont de carré intégrable. L'approximation par splines cubiques résout, elle, le problème de minimisation de la fonctionnelle

$$\Phi(u) = \int_a^b \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)^2 dx, \quad u(x_i)=f_i \quad (i=0, 1, \ldots, n) \qquad (9.32)$$

en classe correspondante.

Notons également que l'erreur d'interpolation par splines cubiques est estimée comme

$$\max |g(x)-f(x)| \leqslant Ch^{\alpha},$$

où $h = \max h_i$, $\alpha$ et $C$ sont des constantes. Si $f(x)$ admet des dérivées secondes continues, $\alpha = 2$.

L'approximation de la fonction cherchée par splines dans le cas des équations intégrales est considérée dans une série de travaux (cf., par exemple, J. Ahlberg, E. Nilson, J. Walsh *[1]).

Sur l'avantage de l'approximation d'une solution déjà obtenue (d'une façon quelconque) de l'équation intégrale voilà ce qu'on peut dire. La nécessité d'une procédure complémentaire de ce genre pour tels ou autres problèmes physiques est dictée par le fait qu'en général on s'intéresse non à la solution même de l'équation intégrale, mais à telles ou autres intégrales de celle-ci ou aux dérivées de ces intégrales. Aussi pour élever la précision est-il préférable d'employer ladite approximation d'autant plus que les propriétés différentielles de la solution sont le plus souvent connues.

## § 10. Méthode des approximations successives

On a exposé au § 1 la théorie analytique de la résolvante en vertu de laquelle la solution de l'équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x) \tag{10.1}$$

peut être obtenue sous la forme d'une série (pour certaines valeurs de $\lambda$)

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x), \tag{10.2}$$

dont les termes sont déterminés par les relations de récurrence suivantes:

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, y)\, \varphi_{n-1}(y)\, dy \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad \varphi_0(x) = f(x). \tag{10.3}$$

Ces intégrales sont calculées aisément par des formules d'intégration habituelles. Considérons d'abord la formule la plus simple: la formule des rectangles.

Divisons le segment $[a, b]$ *) par les points $x_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m + 1$, $x_1 = a$, $x_{m+1} = b$) en $m$ parties. Nous appellerons par la suite ces points points nodaux. Soient $x'_j$ les points milieu de chaque segment élémentaire et appelons-les points de référence.

Conformément aux relations (10.3) déterminons aux points nodaux et aux points de référence la fonction $\varphi_0(x)$ et ensuite à l'aide de la formule des rectangles calculons en tous les points de référence

*) Pour plus de simplicité considérons le cas d'une dimension.

la valeur de la fonction $\varphi_1(x'_j)$:

$$\varphi_1(x'_j) \approx \sum_{i=1}^{m} K(x'_j, x'_i)\,\varphi_0(x'_i)\,\Delta x'_i. \qquad (10.4)$$

Ici $\Delta x'_i$ est la longueur du $i$-ième segment $(x_{i+1} - x_i)$. Réitérant la procédure mentionnée nous trouvons tous les termes suivants de la série (10.2). Le défaut de ce schéma (à part sa précision la plus basse en comparaison des autres formules) est qu'il nécessite une modification dans le cas où le noyau $K(x, y)$ est non borné sur la diagonale $x = y$. On se voit alors dans l'obligeance d'omettre le $j$-ième terme dans la somme, ce qui dans le cas de grandes dimensions des segments élémentaires engendre une erreur complémentaire importante.

Pour élever la précision et surmonter les difficultés, liées à ces particularités, on peut se servir également d'une formule mixte d'intégration quand les valeurs de la fonction $\varphi_1(x)$ sont, comme auparavant, considérées constantes dans les limites d'un segment et quand le noyau est pris égal à la valeur moyenne aux points nodaux. On obtient alors

$$\varphi_1(x'_j) \approx \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \{K(x'_j, x_{i+1}) + K(x'_j, x_i)\}\,\varphi_0(x'_i)\,\Delta x'_i, \qquad (10.5)$$

et de façon analogue pour les termes suivants de la série (10.2).

Le procédé proposé par P. Perline [10] veut qu'on applique la formule des trapèzes à toute l'expression sous le signe somme. Ceci ne présente pas de difficultés à la première étape puisque les valeurs de la fonction $\varphi_0(x)$ sont connues aux points nodaux également. Mais à la seconde étape pour déterminer $\varphi_2(x)$ il devient nécessaire de trouver préalablement les valeurs de la fonction $\varphi_1(x)$ aux points nodaux. Ces valeurs sont trouvées par interpolation à partir des valeurs de la fonction $\varphi_1(x)$ aux points de référence les plus proches (supposant par exemple $\varphi_1(x_i) = {}^1/_2\,[\varphi_1(x'_i) + \varphi_1(x'_{i-1})]$). Les opérations qui suivent sont évidentes. La somme correspondante prend alors la forme

$$\varphi_1(x'_j) \approx \frac{1}{2} \sum \{K(x'_j, x_{i+1})\,\varphi_0(x_{i+1}) + K(x'_j, x_i)\,\varphi_0(x_i)\}\,\Delta x'_i. \qquad (10.6)$$

Une même précision peut être atteinte par division du segment $[a, b]$ d'une autre façon, en d'autres termes par réitération des calculs, considérant cette fois les points $x_i$ points de référence et les points $x'_j$ points nodaux. Mais un tel moyen conduira naturellement à une augmentation injustifiée du volume des calculs.

Arrêtons-nous à la démonstration de la convergence des schéma- décrits ci-dessus et des schémas analogues. Les estimations corress

pondantes, déterminées au moyen des dérivées du noyau, sont connues en littérature (L. Kantorovitch, V. Krylov [1]). Ces estimations permettent de démontrer la convergence des schémas de calcul (pour la convergence de l'algorithme exact, naturellement). Mais pour la plupart des équations intégrales rencontrées en théorie de l'élasticité on ne peut pas utiliser directement ces résultats à cause de la particularité des noyaux et aussi à cause de ce que les valeurs données de $\lambda$ sont soit des valeurs propres, soit coïncident en valeur absolue avec celles-ci.

Le procédé général de démonstration de la convergence des schémas de calcul utilisés dans la méthode des approximations successives consiste en ce qui suit. On fixe le nombre de termes de la série (10.2). Puisqu'il faut pour la somme correspondante calculer un nombre fini d'intégrales, cette somme peut donc être calculée avec une précision donnée d'avance grâce à une partition de plus en plus fine. Il est nécessaire avec l'augmentation du nombre de termes de la série de diminuer la longueur des segments. Dans une telle démonstration, il est vrai, la possibilité de l'accroissement de l'erreur des calculs n'est pas prise en considération.

De ce qui a été énoncé au § 1 découle que la série (10.2) est absolument convergente quand la valeur correspondante de $\lambda$ est en module inférieure à la première valeur propre. Considérons le cas où $\lambda$ coïncide en valeur absolue avec la première valeur propre sans être de même signe. Admettons $\lambda_0 = 1$ et situons pour commencer la valeur propre au point $-1$. Il est clair que la série (10.2) s'avérera divergente. Cependant, comme on a noté au § 1, la résolvante (construite effectivement d'après la série (10.2)) est fonction analytique de $\lambda$ en dehors de ses pôles. Donc pour obtenir au point $\lambda = 1$ une représentation convergente il est licite d'utiliser la méthode du prolongement analytique. On prend un quelconque point $\lambda_1$, situé entre 0 et 1, et on obtient en ce point la solution conformément à (10.2). Pour construire la solution cherchée au point $\lambda = 1$ il faut redévelopper la série suivant l'argument $\lambda' = 1 - \lambda_1$ et porter cet argument dans la représentation définitive. La série ainsi reconstruite sera conventionnellement convergente et s'écrira (dans le cas où $\lambda_1 = 0{,}5$)

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)\varphi_1(x) + \left(\lambda' + \frac{1}{2}\right)^2 \varphi_2(x) + \ldots =$$

$$= \left[\varphi_0(x) + \frac{1}{2}\varphi_1(x) + \frac{1}{4}\varphi_2(x) + \frac{1}{8}\varphi_3(x) + \ldots\right] +$$

$$+ \left[\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \frac{3}{4}\varphi_3(x) + \ldots\right]\lambda' +$$

$$+ \left[\varphi_2(x) + \frac{3}{2}\varphi_3(x) + \ldots\right]\lambda'^2 + \ldots \qquad (10.7)$$

Il est essentiel que les fonctions $\varphi_n(x)$ sont trouvées à l'aide des mêmes relations de récurrence (10.3), qui ne dépendent aucunement des valeurs $\lambda$. Avec les conditions acceptées pour la disposition des $\lambda$, on peut prendre comme point intermédiaire un point situé sur l'axe réel (comme on l'a fait dans la formule (10.7)).

Citons encore la méthode d'élimination du pôle, dite du produit, tout en admettant supplémentairement que le point $\lambda = -1$ est un pôle simple de la résolvante. Dans ce cas le point $\lambda = -1$ n'est pas pôle pour la fonction $(\lambda + 1)\,\Gamma(x, y, \lambda)$ ni par conséquent pour $(\lambda + 1)\,\varphi(x)$. Aussi les séries des fonctions $(\lambda + 1)\,\Gamma(x, y, \lambda)$ et $(\lambda + 1)\,\varphi(x)$ seront-elles convergentes dans un cercle, centré au point zéro, jusqu'à la seconde valeur propre qu'on suppose en valeur absolue supérieure à l'unité.

Il est évident qu'alors la série de la fonction $(\lambda + 1)\,\varphi(x)$ sera de la forme

$$(\lambda + 1)\,\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n\,[\varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x)], \qquad (10.8)$$

et lorsque $\lambda = 1$, nous obtenons

$$\varphi(x) = 0{,}5\,\Big\{\varphi_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [\varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x)]\Big\}. \qquad (10.9)$$

Dans le but d'améliorer l'efficacité de la méthode des approximations successives on a élaboré des recommandations précises sur la transformation de la série (10.2) au moyen du changement de variable $\lambda = \omega(\eta)$, en particulier au moyen d'application conforme (cf. L. Kantorovitch, V. Krylov [1] et V. Koublanovskaïa [1]). Il est clair que le changement de variable est dicté par l'information qu'on a sur la disposition des pôles de la résolvante.

Passons au cas où la valeur donnée de $\lambda_0$ représente un pôle simple de la résolvante. On a montré au § 1 que le facteur associé à la puissance la plus élevée (dans ce cas, la première) du développement en série de la résolvante est fonction propre de l'équation associée (en tant que fonction du deuxième argument). Aussi peut-on, lorsque la condition d'orthogonalité du second membre de l'équation initiale à la fonction propre de l'équation associée est vérifiée, simplifier la représentation de la solution par la résolvante en négligeant le terme mentionné de la série, ceci nous conduisant à la démonstration du fait que la solution représente une fonction analytique de $\lambda$ dans un cercle de rayon supérieur à $|\lambda_0|$. Par conséquent, ici aussi la méthode des approximations successives doit nous conduire à une solution. Toutefois, cette conclusion n'est vraie que lorsque les calculs effectués conformément à (10.3) le sont avec une précision absolue, ce qui n'est possible que dans les cas les plus simples, souvent dépourvus d'intérêt. L'erreur des calculs, elle, conduira

nécessairement à la violation des conditions (1.38), exception faite des cas élémentaires dont on parlera plus bas.

B. Aliev [1] considère la résolution des équations intégrales de deuxième espèce (à noyaux symétriques) sur le spectre du point de vue de la théorie des problèmes mal posés (cf. A. Tikhonov, V. Arsénine [1]). Les calculs sont supposés précis, mais le second membre de l'équation initiale $f(x)$ est donné avec une certaine erreur $\delta$. Dans ce cas la série (10.2) sera comprise dans un sens spécifique (que nous appellerons asymptotique).

L'algorithme s'avère convergent si $\delta^2 N$ tend uniformément vers zéro, où $N$ est le nombre de termes gardés dans le développement en série (10.2). Cette estimation montre qu'avec $\delta$ fixé, on ne peut pas garder dans le développement un nombre arbitrairement grand de termes.

Appliqué au problème considéré concernant l'influence de l'erreur des calculs sur la solution de l'équation intégrale, le résultat indiqué conduit à une conclusion analogue, à savoir que la série (10.2) doit être interprétée comme asymptotique. Pour obtenir la solution on procède de la façon suivante. On fixe le nombre $N$ de termes gardés dans le développement et on choisit une partition fine du segment permettant d'atteindre la précision voulue pour la somme finie cherchée. Si l'on néglige l'erreur des calculs (reste l'erreur des formules d'intégration), il est toujours possible d'atteindre la précision fixée à l'avance puisqu'un nombre fini d'intégrales se calcule avec la précision voulue. Avec l'augmentation du nombre de termes gardés dans le développement il faut diminuer de façon correspondante la longueur des segments partiels. En fin de compte on réussit à déterminer avec la précision qu'on s'est donnée d'avance les valeurs de quelques sommes finies et si la variation des dernières de celles-ci se trouve être dans les limites de cette précision, on arrête les calculs.

Considérons maintenant un autre procédé d'élaboration de représentation convergente (P. Perlin [10]). Soit $\psi_1(x)$ une fonction propre normée de l'équation associée

$$\psi(x) = \lambda \int_a^b K(y, x)\, \psi(y)\, dy. \tag{10.10}$$

Transformons le second membre de l'équation (10.1) en ajoutant l'expression

$$-\psi_1(x) \int_a^b f(y)\, \psi_1(y)\, dy. \tag{10.11}$$

Généralement, celle-ci doit s'annuler en vertu de la condition (1.38), mais placée dans une formule d'intégration quelconque, elle sera une grandeur petite. L'avantage d'un second membre de ce genre

consiste en ce qu'il est strictement orthogonal à la fonction $\psi_1(x)$ (d'après la même formule d'intégration):

$$\int_a^b \left\{ f(x) - \psi_1(x) \int_a^b f(y)\,\psi_1(y)\,dy \right\} \psi_1(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\,dx - \int_a^b \psi_1^2(x)\,dx \int_a^b f(y)\,\psi_1(y)\,dy = 0. \quad (10.12)$$

Remarquons que cette égalité est vraie quand la fonction $\psi_1(x)$ est normée conformément à cette même formule d'intégration. Du moment que chaque fonction $\varphi_n(x)$ doit être orthogonale au second membre (cf. § 1), il est donc naturel lorsqu'on passe à chaque nouvelle fonction $\varphi_n(x)$ de réaliser une correction analogue à (10.11):

$$\tilde{\varphi}_n(x) = \varphi_n(x) - \psi_1(x) \int_a^b \varphi_n(y)\,\psi_1(y)\,dy \qquad (n = 1, 2, \ldots) \quad (10.13)$$

et d'utiliser les fonctions $\tilde{\varphi}_n(x)$ pour la construction de $\varphi_{n+1}(x)$.

Les raisonnements énoncés conduisent à la démonstration rigoureuse de la convergence à condition de prendre comme fonction $\psi_1(x)$ non une fonction propre de l'équation associée même, mais celle d'une équation qui est effectivement associée à l'équation intégrale approchée qu'on construit.

Il est clair que pour les systèmes d'équations intégrales dont la résolvante admet un pôle simple apparaissent plusieurs fonctions propres de l'équation associée et, ceci étant, les termes complémentaires sont construits pour chacune d'elles séparément. Il est essentiel que dans ce cas les fonctions propres sont prises sous forme orthonormée, l'orthonormalisation étant réalisée par la même formule que celle qui sert à former les termes complémentaires. Quelques procédés particuliers spéciaux de construction d'algorithmes convergents seront rapportés pour des équations concrètes (§§ 18, 19).

Attirons l'attention sur le fait que si l'équation se résout sur la frontière du cercle de convergence (mais non sur le spectre) et que le second membre s'avère une fonction propre orthogonale de l'équation associée (pour la valeur propre), il n'y a pas besoin d'utiliser les différents procédés décrits ci-dessus (élimination du pôle par méthode du produit et procédés analogues) puisque la série (10.2) s'avère elle-même convergente.

Arrêtons-nous sur un cas particulier (mais important pour les applications) où le point $\lambda = 1$ est le pôle (simple) de la résolvante le plus petit en valeur absolue. D'une manière analogue à (10.8)

nous obtenons alors que le rayon de convergence de la série

$$(1-\lambda)\,\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\,[\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + \\ + \lambda^2\,[\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] + \ldots \quad (10.14)$$

est supérieur à 1 (cf. N. Gunter [1]). Il existe donc un $\tau = 1$ tel que pour $m > N$ le rapport $\frac{\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)}{\tau_n}$ sera aussi petit que l'on veut. Pour $m > n$ nous avons

$$\varphi_m(x) - \varphi_n(x) = [\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)] + \\ + [\varphi_{m-1}(x) - \varphi_{m-2}(x)] + \ldots + [\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)].$$

Par conséquent

$$|\varphi_m(x) - \varphi_n(x)| < |\varphi_m(x) - \varphi_{m-1}(x)| + \ldots \\ \ldots + |\varphi_{m+1}(x) - \varphi_n(x)| < \tau^m + \ldots + \tau^{n+1} < A\tau^n \quad \left(A = \frac{\tau}{1-\tau}\right). \quad (10.15)$$

De l'estimation (10.15) découle l'affirmation (dite principe de Robin) que les fonctions $\varphi_n(x)$ tendent, et de plus uniformément, vers une limite (qu'on notera $\varphi^*(x)$). Aussi peut-on passer à la limite de gauche et de droite dans les relations de récurrence (10.3). En définitive, nous en venons à affirmer que la fonction limite $\varphi^*(x)$ représente une des fonctions propres de l'équation intégrale initiale au point $\lambda = 1$. Dans le cas particulier où les conditions d'orthogonalité aux fonctions propres de l'équation associée sont réalisées, $\varphi^* = 0$.

On tire des estimations rapportées plus haut l'expression (P. Perline, E. Chafarenko, A. Sternchis [1]) de la somme finie de la série (10.2):

$$\varphi_N(x) = \sum_{n=0}^{N1} \varphi_n(x) = \Phi(x) + N\varphi^*(x) + \varepsilon_N(x), \qquad (10.16)$$

où $\Phi(x)$ est une certaine fonction et $\varepsilon_N(x)$ tend vers zéro lorsque $N \to \infty$.

On aboutit à des résultats analogues dans le cas où le plus petit pôle en valeur absolue de la résolvante est le point $\lambda = -1$. La limite

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \varphi_n(x) = \varphi^*(x)$$

existe et la fonction $\varphi^*(x)$ sera fonction propre de l'équation initiale au point $\lambda = -1$. On obtient pour la somme finie des termes de la série la même formule que (10.16).

Il découle de notre exposé que la méthode des approximations successives conduit pour les équations de ce type aux fonctions propres pour un second membre arbitraire. L'utilité des formules du type (10.16) (les séries qu'elles déterminent divergent) est évidente, car dans les cas où l'équation intégrale sert à résoudre un problème aux limites, les grandeurs cherchées ne dépendent pas des fonctions propres de l'équation intégrale (cette question est élucidée en détail au chapitre VI).

Notons que S. Mikhline [6] résout le problème de construction approchée de la résolvante moyennant le remplacement du noyau par le noyau dégénéré et obtient différentes estimations de l'erreur.

Plus haut les équations intégrales étaient supposées régulières. Arrêtons-nous succinctement aux particularités surgissant lors de la résolution des équations singulières par approximations successives. Il est évident que si la convergence de la méthode est démontrée, sa réalisation se ramène également au calcul des intégrales conformément aux relations de récurrence (10.3) et la présence de singularité ne se manifeste que dans la nécessité d'utiliser des formules d'intégration spécifiques.

S. Mikhline [2] a démontré (cf. § 8) que pour une norme suffisamment petite de l'opérateur singulier (déterminée par la norme de l'opérateur de régularisation) la méthode des approximations successives s'avère convergente. V. Kupradze [3] a montré le bien-fondé de l'application de la méthode pour la résolution des équations intégrales singulières bidimensionnelles de la théorie de l'élasticité quand le milieu est homogène par morceaux (dans le cas spécial du problème fondamental de contact (§ 35)), et Pham The Lai *[1]) a étendu ce résultat au cas des problèmes spatiaux fondamentaux (premier et deuxième) de la théorie de l'élasticité (§ 33). Certaines questions de convergence de la méthode des approximations successives, appliquée aux équations apparaissant au cours de la résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité, seront considérées au § 33.

Les questions de construction des formules d'intégration pour les intégrales singulières dans le cas d'une dimension seront envisagées au § 12. Dans le cas de deux dimensions et plus les formules d'intégration sont obtenues pour des noyaux de forme spécifique seulement. B. Gabdulkhaev [2] a considéré une intégrale singulière avec le noyau de Hilbert

$$\int_0^{2\sigma}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-x'}{2}\operatorname{cotg}\frac{y-y'}{2}\,\varphi(x, y)\,dx\,dy,$$

et A. Vaïndiner et V̇. Moskvitine [1] une intégrale avec des noyaux qu'on rencontre dans les équations intégrales de la théorie de l'élasticité (cf. également §§ 31, 33).

## § 11. Méthode d'intégration mécanique pour les équations intégrales régulières

Considérons à nouveau l'équation intégrale de Fredholm (10.1), mais avec d'autres notations pour plus de commodité:

$$x(s)-\lambda\int_0^1 H(s, t)\,x(t)\,dt=y(s).$$

Divisons le segment en $m$ parties comme au paragraphe précédent. Chacun des procédés proposés de calcul approché des intégrales aux points de référence pour des valeurs conventionnellement données de la densité conduit à un système d'équations linéaires par rapport à ces valeurs. Il y a des estimations permettant de démontrer (pour des contraintes bien définies imposées au noyau et au second membre) la convergence de la représentation réticulaire ainsi obtenue de la solution vers la solution exacte. On a en outre les résultats fondamentaux suivants.

Si l'équation intégrale est résoluble ($\lambda$ n'étant pas valeur propre), le système linéaire correspondant sera résoluble à partir, pour le moins, d'une division suffisamment petite.

La démonstration consistera à obtenir certaines estimations, nécessaires pour l'application des principes de la théorie des méthodes approchées (cf. § 9).

Présentons la formule d'intégration sous la forme

$$\int_0^1 x(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}x(t_k^{(n)}). \tag{11.1}$$

Les points $t_k$ sont affectés également d'indice supérieur permettant la variation de leur nombre total et de leur disposition. L'équation est remplacée alors par le système d'équations:

$$x(t_i^{(n)})-\lambda\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}H(t_i^{(n)}, t_k^{(n)})\,x(t_k^{(n)})=y(t_i^{(n)})\quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{11.2}$$

Si le segment est divisé en $n$ parties et l'on veut appliquer la formule des rectangles, on a

$$t_k^{(n)}=\frac{2k-1}{2n},\qquad A_k^{(n)}=\frac{1}{n}\qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Nous supposerons pour plus de simplicité que les fonctions $H(s, t)$ et $y(s)$ et par conséquent $x(s)$ sont des fonctions périodiques de période 1. Nous adoptons en qualité d'espace $X$ l'espace $C$ des fonctions périodiques continues (de période 1), en qualité d'espace $X'$

l'ensemble des fonctions périodiques brisées avec pour abscisses de leurs sommets les points $t_k^{(n)}$. Comme espace $\overline{X}$ nous choisissons l'espace de dimension finie $m_n$ formé des éléments $\overline{x} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ et muni de la norme $\| x \| = \max \| \xi_i |$, et comme image de la fonction ses valeurs en $n$ points:

$$\overline{x} = \varphi x = [x(t_1^{(n)}), \ldots, x(t_n^{(n)})].$$

Soit $\overline{x} = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$, l'élément $x' = \varphi_0^{-1}x$ (de l'espace $X'$) sera alors une fonction linéaire par morceaux avec ses sommets aux points $(t_k^{(n)}, \eta_k)$. On a évidemment

$$\| \varphi \| = \| \varphi_0^{-1} \| = 1.$$

Désignons par $\overline{H}$ l'opérateur dans l'espace $\overline{X}$, défini par la matrice $\| A_k^{(n)} H(t_i^{(n)}, t_k^{(n)}) \|$. Se référant alors au § 9, nous concluons que le théorème I aura lieu si seulement les conditions (9.3), (9.5), (9.16) sont vérifiées.

Notant $\omega^s(\delta)$ et $\omega^t(\delta)$ les modules de continuité du noyau par rapport à chacun des arguments, cherchons l'estimation de la norme:

$$\| \varphi H x' - \overline{H} \varphi x' \| = \max_i \left| \int_0^1 H(t_i, t) x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} A_k H(t_i, t_k) x'(t_k) \right| =$$

$$= \max_i \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{t_k}^{t_{k+1}} H(t_i, t) x'(t)\, dt - \sum_{k=1}^{n} H\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) x'(t)\, dt + \right.$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} H\left(t_i, \frac{t_k + t_{k+1}}{2}\right) [x'(t_k) + x'(t_{k+1})] -$$

$$\left. - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} H(t_i, t_k) x'(t_k) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left[ \omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2}\omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) \right] \| x' \| = 2\omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) \| x' \|. \tag{11.3}$$

Par conséquent, la condition (9.3) est remplie, et $\varepsilon = 2\omega^t\left(\frac{1}{2n}\right)$.

Passons à la vérification de la condition (9.5). En qualité de fonction $x' \in X'$ approximant les intégrales

$$g(s) = \int_0^1 H(s, t) x(t)\, dt,$$

nous prenons la fonction linéaire par morceaux coïncidant avec celles-ci aux points $t_i$, autrement dit pour $t_i \leqslant s \leqslant t_{i+1}$:

$$x'(s) = n(t_{i+1} - s)\int_0^1 H(t_i, t)\, x(t)\, dt + n(s - t_i)\int_0^1 H(t_{i+1}, t)\, x(t)\, dt.$$

Nous obtenons l'estimation

$$|g(s) - x'(s)| =$$

$$= \left| \int_0^1 \{H(s, t) - n(t_{i+1} - s) H(t_i, t) - n(s - t_i) H(t_{i+1}, t)\}\, x(t)\, dt \right|.$$

L'expression dans l'accolade étant estimée par $\omega^s(1/n)$, on obtient

$$\| Hx - x' \| \leqslant \omega^s\left(\frac{1}{n}\right) \| x \|, \qquad (11.4)$$

et par conséquent, $\varepsilon_1 = \omega^s(1/n)$. Des raisonnements analogues pour la fonction $y$ nous conduisent à l'estimation

$$\| y - y' \| \leqslant \omega^y\left(\frac{1}{n}\right), \qquad (11.5)$$

où $\omega^y(\delta)$ est le module de continuité de la fonction $y$. Donc, la condition (9.16) est observée et

$$\varepsilon_2 = \omega^y\left(\frac{1}{n}\right) \frac{1}{\| y \|}. \qquad (11.6)$$

Ainsi, la constante $q$ figurant dans le théorème I

$$q = |\lambda| \left[ \| K \| \,\omega^s\left(\frac{1}{n}\right) + 2\omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) + \right.$$
$$\left. + 2 |\lambda|\, \omega^s\left(\frac{1}{n}\right) \omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) \right] \cdot \| \bar{K}^{-1} \|$$

peut être rendue inférieure à 1 moyennant un accroissement adéquat de $n$, ce qui nous conduit au résultat cherché (rappelons que $\bar{K}\bar{x} = \bar{x} - \lambda \bar{H}\bar{x}$).

Rapportons les formules définitives donnant l'estimation de l'erreur de la solution approchée $\varphi_0^{-1}\bar{x}_0$:

$$\| x^* - \varphi_0^{-1}\bar{x}_0 \| \leqslant \left\{ 4 |\lambda|\, \omega^t\left(\frac{1}{2n}\right) \| \bar{K}^{-1} \| + \right.$$
$$\left. + \left( |\lambda|\, \omega^s\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\| K \| \,\omega_y\left(\frac{1}{n}\right)}{\| y \|} \right) (1 + \| K \| \cdot \| \bar{K}^{-1} \|) \right\} \| x^* \|.$$

Des résultats analogues auraient pu être obtenus pour le cas non périodique également en utilisant la formule des trapèzes.

Passons à la considération des équations intégrales quand le nombre $\lambda$ est une valeur propre. On peut certes ici aussi appliquer formellement la méthode d'intégration mécanique, mais des difficultés de poids apparaissent alors. Premièrement, on aboutit à un système d'équations linéaires dégénéré ou presque, et il importe pour obtenir une solution stable d'avoir recours aux procédés de régularisation (cf. A. Tikhonov, V. Arsénine [1]). Deuxièmement, ayant obtenu des valeurs stables il faut démontrer qu'à la limite la solution du système tend vers la solution exacte de l'équation intégrale.

Notons qu'on peut utiliser dans certains cas des procédés spécifiques. Par exemple, si les fonctions propres de l'équation initiale et associée sont connues, il convient alors de passer à l'équation (1.36) qui ne sera plus associée à la valeur propre. On trouvera au § 18 le procédé de P. Perline et Yu. Chalioukhine [1] appliqué au problème de réalisation numérique de l'équation de N. Muskhelishvili.

## § 12. Méthodes approchées de résolution des équations intégrales singulières

Il découle des résultats énoncés au chapitre I que les équations intégrales singulières peuvent être transformées en équations régulières équivalentes (seule l'existence d'une telle transformation est démontrée dans le cas d'équations non unidimensionnelles). Aussi pour résoudre l'équation singulière peut-on, en général, passer aux équations régulières correspondantes et obtenir leur solution approchée. Toutefois, vu la complexité de l'élaboration de l'équation régulière cherchée (aussi bien du noyau que du second membre), la réalisation d'une telle procédure paraît assez volumineuse.

Dans cette optique, la recherche de la solution des équations intégrales singulières (unidimensionnelles) *) mêmes paraît préférable. Les méthodes proposées sont en grande partie la généralisation des procédés de résolution des équations intégrales régulières, qui tiennent compte du trait spécifique du calcul des intégrales singulières et surtout du fait que les équations intégrales singulières caractéristiques se laissent résoudre sous forme explicite.

Nombreux travaux sont consacrés à la résolution des équations intégrales singulières (aussi bien à la construction des algorithmes approchés qu'à leur justification). Citons ceux de M. Lavrentiev, S. Mikhline, A. Kalandia, V. Ivanov, B. Gabdulkhaev.

Arrêtons-nous d'abord aux cas de la résolution directe des équations intégrales singulières aussi bien pour les contours fermés que

*) Le cas d'un plus grand nombre de dimensions n'est pas considéré à cause du manque pratiquement d'études générales quelconques. Les équations particulières (les équations de la théorie de l'élasticité) sont étudiées au § 35 et plus loin.

pour les contours non fermés, sans transformation préalable du contour en circonférence unitaire $\gamma$ ou en segment $L_1$ (—1, 1). Pour plus de simplicité limitons-nous au cas d'un seul contour.

Supposons (cf. S. Mikhline, H. Smolitski [1]) que le noyau de l'opérateur régulier est une fonction dégénérée

$$K(t, \tau) = \sum_{k=1}^{n} u_k(t) v_k(\tau). \tag{12.1}$$

On peut alors, après avoir porté le terme régulier dans le second membre, représenter l'équation initiale sous la forme

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = f(t) - \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(t), \tag{12.2}$$

où

$$c_k = \int_L v_k(\tau)\varphi(\tau)\,d\tau.$$

Nous supposerons les coefficients $c_k$ conventionnellement donnés. On parvient alors à résoudre l'équation sous forme explicite (admettant que pour une valeur négative de l'indice, la fonction $f(t)$ vérifie les conditions d'orthogonalité). La solution de l'équation caractéristique obtenue dans ce cas dépend des paramètres $c_k$ et la substitution de cette solution dans les égalités déterminant les constantes $c_k$ conduit à un système linéaire.

Abordons le problème du calcul des intégrales singulières qui précède, naturellement, la considération de la résolution approchée des équations intégrales singulières. Si les densités des intégrales singulières étaient connues, le calcul même des intégrales était une opération élémentaire grâce aux représentations régulières (2.5) et (2.18). Plus encore, on peut calculer directement ces intégrales comme intégrales impropres en partageant préalablement le contour en portions d'égale longueur et en éliminant conformément à la définition de l'intégrale singulière deux portions voisines du point singulier. Soit $t_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n+2$, $t_1 = a$, $t_{n+2} = b$) un tel ensemble de points. Les longueurs de toutes les cordes $t_{i+1} - t_i$ doivent être égales entre elles, sauf peut-être la longueur de la corde $t_{n+2} - t_{n+1}$ qui doit être non supérieure aux autres. Nous définirons également les points de la courbe $L$ par la longueur de l'arc $s$, mesurée à partir du point $t_1 = a$. Notons $M = \max\left|\frac{s - s_0}{t - t_0}\right|$ $(t, t_0 \in L)$. Nous choisirons le nombre $n$ suffisamment grand pour que sur l'arc $(t_j, t_{j+1})$ soient vérifiées les inégalités

$$|t_{j+1} - t_j| \leqslant |t_k - t_j| \quad (k \neq j),$$
$$|s_j - s| \leqslant 2\,|t_j - t| \leqslant 4\,|t_{j+1} - t_j|.$$

V. Ivanov [1] a démontré que la formule d'intégration obtenue par le procédé proposé ci-dessus (connaissant les valeurs de la fonction $\varphi(t)$ aux points $t_j$)

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-t_k}\,dt=\frac{1}{\pi i}\ln\frac{b-t_k}{t_k-a}-\sum_{j=1}^{n+1}{}' \frac{\varphi(t_j)-\varphi(t_k)}{t_j-t_k}\,\frac{1}{\pi i}\,(t_{j+1}-t_j) \tag{12.3}$$

donne l'erreur

$$\Delta_n<\frac{8}{\pi}A\left(\frac{1}{\alpha}+M\ln 2n\right)\left(\frac{S}{n}\right)^{\alpha},$$

le cran montre que la somme est prise sur tous les $j\neq k,\ k-1$ ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n+1$), $S$ est la longueur totale d'arc, $A$ la constante de la condition H-L.

Passons maintenant au cas où la densité possède une singularité, admettons au point $t_1=a=-1$. Limitons-nous au cas du contour $L_1$. Désignons par $\sigma_n(t_0)$ le voisinage du point $t_0$ ayant son centre en celui-ci et la longueur $2/n$, $n$ étant suffisamment grand pour que $|t_0-a|>3/n$. Partageons ensuite le contour $L_1$ en $2n$ parties égales par des points $t_1,\ t_2,\ \ldots,\ t_{2n+1}$. La formule d'intégration s'écrit alors

$$\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau+1)^{\gamma}(\tau-t)}=\varphi(-1)\int_{L_1}\frac{d\tau}{(\tau+1)^{\gamma}(\tau-t)}+\\ +\sum_{j=1}^{2n}{}'\frac{\varphi(t_j)-\varphi(-1)}{t_j+1}\,\frac{(t_{j+1}+1)^{1-\gamma}-(t_j+1)^{1-\gamma}}{1-\gamma}. \tag{12.4}$$

L'intégrale figurant dans celle-ci peut être représentée par la série

$$\int_{L_1}\frac{d\tau}{(\tau+1)^{\gamma}(\tau-t)}=\frac{\pi\operatorname{cotg} j\pi}{(t+1)^{\gamma}}+\sum_{s=0}^{\infty}\frac{1}{(1+\gamma)^{2s+\gamma}}\,(t+1)^{s}. \tag{12.5}$$

Le cran dont le signe $\sum$ est affecté signifie que la somme est prise sur tous les $j$ tels que le segment $(t_{j+1},\ t_j)\notin\sigma_n(t)$. Si la singularité se manifeste au point 1, un changement de signe est nécessaire dans certains des termes. L'erreur de la formule d'intégration est estimée de la façon suivante:

$$\Delta_n<\frac{6}{|t+1|^{\gamma}}\left[\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{1-\lambda}+\ln\frac{n^2(1-t^2)}{2}\right]\frac{1}{n^{\alpha}}$$
$$(0\leqslant\lambda=\operatorname{Re}\gamma<1).$$

Remarquons que la précision des formules d'intégration se trouve sensiblement élevée si on se base sur l'approximation polygonale de la densité, en d'autres termes, si on remplace $\varphi(t)$ par les fonctions linéaires

$$\varphi^*(t)=\varphi(t_k)\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}+\varphi(t_{k+1})\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\quad (t\in(t_k,t_{k+1})).$$

Pour un contour fermé l'erreur est estimée à $C\ln n\cdot n^{-2}$ (cf. A. Korneitchuk [1]).

V. Ivanov [1] a établi ses formules d'intégration à partir des polynômes de Faber $\Phi_k(z)$ *). Dans ce cas l'intégrale singulière s'exprime par

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=-\varphi(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\Phi_k(t), \tag{12.6}$$

où

$$\varphi_k=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\Phi^k(\tau)}\Phi'(\tau)\,d\tau.$$

Si l'on ne garde dans la représentation (12.6) que $n$ termes, l'erreur de la formule est alors: $Cn^{\varepsilon-\alpha}$, où $\alpha$ est l'indice de la classe H-L à laquelle appartient la fonction $\varphi(t)$, et $\varepsilon>0$. Dans le cas où la fonction $\varphi(t)$ admet une dérivée d'ordre $p$, elle aussi de classe H-L, l'estimation de l'erreur est renforcée: $Cn^{\varepsilon-p-\alpha}$.

Soit à présent $L$ un contour non fermé, différentiable, d'extrémités $a$ et $b$. Supposons que la densité peut être représentée sous la forme $\frac{\varphi(t)}{(t-a)^{\gamma}}$ ($\operatorname{Re}\gamma<1$). L'intégrale singulière correspondante est alors

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-t)}=\frac{\varphi(a)\operatorname{cotg}\gamma\pi}{\pi i(\tau-a)^{\gamma}}+$$
$$+\frac{\varphi(t)}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(b-a)^{-\gamma-k}}{\gamma+k}(t-a)^k+\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Phi_k(\tau)-\Phi_k(t)}{(\tau-a)^{\gamma}(\tau-t)}\,d\tau. \tag{12.7}$$

Une formule analogue (aux signes près) peut être obtenue dans le cas où la densité admet une singularité à l'extrémité $b$. Il convient de rappeler que pour le segment $L_1$ les polynômes de Faber sont polynômes de Tchébychev.

Considérons maintenant quelques cas spéciaux de représentation de la densité pour lesquels le calcul des intégrales singulières est

*) Le polynôme de Faber d'ordre $k$ est la partie polynomiale de $k$-ième degré de la fonction réalisant l'application conforme de l'extérieur de contour sur l'extérieur du cercle et dont le coefficient dominant est égal à l'unité.

élémentaire. Soit $\gamma$ comme auparavant une circonférence de rayon unité. Prenons la fonction $\varphi_n(t)$ sous la forme d'une série tronquée de Fourier

$$\varphi_n(t)=\sum_{k=-n}^{n} a_k t^k. \tag{12.8}$$

La valeur de l'intégrale singulière de la somme finie (12.8) est alors

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=\sum_{k=0}^{n} a_k t^k-\sum_{k=-n}^{-1} a_k t^k. \tag{12.9}$$

Si l'on construit la représentation sous forme d'une série en partant des valeurs de la densité aux points $t_j=e^{i\theta_j}$ $\left(\theta_j=\frac{2\pi}{2n+1}j\right)$, le polynôme d'approximation est de la forme

$$\varphi_n(t)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(t_j)\left(\frac{t}{t_j}\right)^{-n}\frac{1-\left(\frac{t}{t_j}\right)^{2n+1}}{1-\left(\frac{t}{t_j}\right)}. \tag{12.10}$$

L'intégrale singulière, elle, est égale à

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi_n(\tau)}{\tau-t}\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=-n}^{n}\varphi(t_j)\left[1+\frac{2i\sin n\frac{\theta-\theta_j}{2}\sin(n+1)\frac{\theta-\theta_j}{2}}{\sin\frac{\theta-\theta_j}{2}}\right]. \tag{12.11}$$

Passons maintenant à la construction de la solution approchée des équations singulières quand le contour est un cercle. Nous supposerons que l'indice $\varkappa\geqslant 0$, donc que la solution existe toujours. Pour fixer les idées nous chercherons la solution pour laquelle l'intégrale de type Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}\,d\tau$$

admet à l'infini un zéro de l'ordre le plus élevé. Choisissons pour cela la représentation de la solution sous forme de la série

$$\tilde{\varphi}(t)=\sum_{k=0}^{n}\alpha_k t^k+\sum_{k=-n}^{-1}\alpha_k t^{k-\varkappa}. \tag{12.12}$$

On peut calculer les coefficients $\alpha_k$ de différentes manières (comme dans le cas des équations régulières) : par une méthode selon laquelle

on égale les deux membres de l'équation en un ensemble quelconque de points du contour (aux mêmes points $t_j$ par exemple) dite méthode de collocation, ou par la méthode des moindres carrés, en exigeant que l'écart entre les premier et second membres soit minimal (en moyenne) (cf. S. Mikhline [4]), etc.

B. Gabdulkhaev [1] a étudié la première des méthodes citées du point de vue général de la théorie des méthodes approchées (cf. § 9). Il est démontré que lorsque l'indice est égal à zéro et dans le cas où l'équation n'admet pas de fonctions propres, il existe une valeur $n$ *) telle que le système obtenu par cette méthode soit toujours résoluble. La solution approchée $\tilde{\varphi}(t)$ ainsi déterminée converge vers la solution exacte aussi rapidement que

$$\| \varphi - \tilde{\varphi} \| \leqslant (A_2 \ln n + B_2)\, n^{-r-\alpha+\beta}, \tag{12.13}$$

où $A_1$, $A_2$, $B_1$ et $B_2$ sont certaines constantes ne dépendant pas de $n$, $\beta$ une constante arbitraire, $\alpha > \beta > 0$. L'inégalité (12.13) est comprise au sens de la norme

$$\| \varphi \| = \max_t | \varphi(t) | + \sup_t \frac{| \varphi(t_1) - \varphi(t_2) |}{| t_1 - t_2 |^{\beta}}.$$

V. Ivanov [1] a considéré cette même méthode pour un autre espace fonctionnel, ce qui explique l'obtention d'une estimation différente.

Passons maintenant à la résolution directe de l'équation singulière sur le cercle $\gamma$ par la méthode d'intégration mécanique (cf. Fan Van Khap [1]). Récrivons l'équation sous la forme

$$\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \int_{\gamma} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \int_{\gamma} k(t, \tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t). \tag{12.14}$$

L'équation (12.14) étant déjà normée, $a(t) = 1$. Pour ce qui est du noyau $k(t, \tau)$, une singularité intégrable est admissible, autrement dit

$$| k(t, \tau) | < C\, | t - \tau |^{\mu-1} \quad (\mu > 0).$$

Appliquant les formules d'intégration à l'équation initiale on obtient l'équation fonctionnelle

$$\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i} \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t)}{t_k - t}\, \Delta t_k + \sum_{k=1}^{n}{}' k(t, t_k)\, \varphi(t_k)\, \Delta t_k = f(t), \tag{12.15}$$

$$t \in (t_j, t_{j+1}), \quad k < j - 1, \quad k > j + 1, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k.$$

---

*) Plus précisément, vérifiant la contrainte

$$(A_1 \ln r + B_1)\, n^{-r-\alpha+\beta} < 1.$$

Les points $t_k$ divisent comme auparavant le cercle en $n$ parties égales. Les fonctions $b(t)$, $f(t)$, $k(t, \tau)$ appartiennent à la classe H-L (sauf les points $\tau = t$ pour le noyau $k(t, \tau)$). Pour la résolution approchée de (12.15) nous égalons les membres gauche et droit de cette équation aux points $t_k$. Nous sommes alors conduits au système

$$\varphi(t_l) + \frac{b(t_l)}{\pi i} \sum_{\substack{k=1 \\ k<l-1,\, k>l+1}}^{n}{}' \frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_l)}{t_k - t_l} \Delta t_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k<l-1,\, k>l+1}}^{n}{}' k_{lk} \varphi(t_k) = f(t_l). \quad (12.16)$$

Il est démontré que si l'équation proposée (12.14) admet une solution unique, alors à partir d'un certain $n$ le système (12.16) aussi admettra une solution unique et la solution approchée ainsi obtenue convergera uniformément vers la solution exacte lorsque $n$ tend vers l'infini.

## § 13. Méthodes approchées de résolution des équations intégrales singulières (suite)

Considérons à présent les cas d'un contour discontinu. On a montré au § 6 que l'équation pour un contour discontinu peut toujours être ramenée à une équation pour un contour continu. Mais dans ce cas l'équation devient assez volumineuse et à part cela le contour d'intégration s'agrandit, ce qui complique la résolution effective pour des mêmes ressources de l'ordinateur.

L'utilisation de la formule (12.4) et de formules analogues permet d'obtenir dans ce cas aussi la solution de l'équation intégrale. Il est rationnel bien sûr (mais non obligatoire) d'inclure dans la représentation de la solution des facteurs correspondant aux singularités de la solution aux points extrémités. Ces singularités sont déterminées d'emblée du problème auxiliaire de Riemann (cf. § 5).

Une attention particulière est accordée aux équations singulières à coefficients $a(t)$ et $b(t)$ constants quand le contour $L$ représente un segment que nous désignons par $L_1$. Les équations de ce type sont rencontrées assez souvent dans les applications (cf. § 23) et pour leur résolution on a mis au point toute une série de procédés spéciaux (M. Lavrentiev, A. Kalandia, G. Pykhtéev et autres).

Rapportons cette équation

$$a\varphi(t) + \frac{b}{\pi i} \int_{L_1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{L_1} k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t). \quad (13.1)$$

Il découle de ce qui a été démontré au § 6 que la solution de l'équation (13.1) peut être représentée sous la forme

$$\varphi(t) = g(t)(1 - t)^{\alpha}(t + 1)^{\beta}, \quad (13.2)$$

où la fonction $g(t)$ est continue et non nulle sur tout le contour $L_1$ et les exposants $\alpha$ et $\beta$ sont déterminés à l'aide des égalités

$$\alpha=\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)+N,\quad \beta=-\frac{1}{2\pi i}\ln\left(\frac{a-ib}{a+ib}\right)+M. \qquad (13.3)$$

Les nombres entiers $N$ et $M$ sont choisis de telle sorte que les constantes $\alpha$ et $\beta$ vérifient les contraintes $-1<\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta<1$ assurant la signification physique de la solution du problème aux limites initial. Il est évident que la somme $\alpha+\beta$ sera un nombre entier égal à l'indice de l'équation, et c'est pourquoi, quand $\alpha+\beta=-1$ (la somme ne peut pas être moindre), l'équation (13.1) sera résoluble si la condition (4.13) est vérifiée. Quand au contraire $\alpha+\beta=1$, il convient d'exiger, pour l'univocité de la solution, que soit vérifiée la condition

$$\int_{L_1}\varphi(\tau)\,d\tau=A, \qquad (13.4)$$

où $A$ est une certaine constante.

La densité étant représentée par (13.2), il est préférable de rechercher la nouvelle fonction $g(t)$ sous la forme d'une série suivant les polynômes de Jacobi (cf. par exemple D. Jackson *[1])

$$g(t)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nP_n^{(\alpha,\beta)}(t). \qquad (13.5)$$

Rappelons qu'on appelle polynômes de Jacobi les polynômes de la forme

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(t)=\frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-t)^{-\alpha}(1+t)^{-\beta}\frac{d^n}{dt^n}[(1-t)^{\alpha+n}(1+t)^{\beta+n}]. \qquad (13.6)$$

Lorsque $\alpha=\beta=0$, les polynômes de Jacobi coïncident avec les polynômes de Legendre et, lorsque $\alpha=\beta=-1/2$ et $\alpha=\beta=1/2$, ils coïncident avec les polynômes de Tchébychev de première et seconde espèces respectivement. Les polynômes de Jacobi représentent (pour des valeurs fixées des paramètres $\alpha$ et $\beta$) un système orthogonal de fonctions sur le segment $L_1$ avec le poids

$$\omega(t)=(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta},$$

et il faut pour l'orthonormalité introduire en outre les facteurs

$$\left[\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}\cdot\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)\,n!}{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}\right]^{1/2}=\frac{1}{[\theta_n^{(\alpha,\beta)}]^{1/2}}.$$

Dans notre cas, où les paramètres $\alpha$ et $\beta$ ne sont pas arbitraires (leur somme ($k$) est le nombre entier 1, 0 ou $-1$), on a la formule (cf.

F. Erdogan, G. D. Gupta, T. S. Cook *[1])

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1} \omega(\tau) P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau)\frac{d\tau}{\tau-t} =$$
$$= -\frac{a}{b}\,\omega(t) P_n^{(\alpha,\beta)}(t) - 2^{-k}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\pi} P_{n-k}^{(-\alpha,-\beta)}(t). \quad (13.7)$$

L'égalité (13.7) permet d'élaborer d'emblée une méthode approchée de résolution de l'équation intégrale (13.1) si la solution est recherchée sous forme de la série (13.5). Nous sommes amenés alors à l'équation fonctionnelle

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left[-\frac{2^{-k}b}{\sin\pi\alpha} P_{n-k}^{(-\alpha,-\beta)}(t) + h_n(t)\right] = f(t), \quad (13.8)$$

où

$$h_n(t) = \int_{L_1} \omega(\tau) P_n^{(\alpha,\beta)}(\tau) k(t,\tau)\,d\tau.$$

Pour résoudre cette équation on peut développer ses premier et second membres suivant les polynômes de Jacobi $P_l^{(-\alpha,-\beta)}(t)$ ($l =$ $= 0, 1, \ldots$). Puis, égalant les coefficients des mêmes polynômes, on parvient au système d'équations algébriques

$$-\frac{2^{-k}b}{\sin\pi\alpha}\theta_l(-\alpha, \quad -\beta)\,a_{l+k} + \sum_{n=0}^{N} d_{nl}c_n = F_l \quad (l = 0, 1, \ldots, N),$$

où (13.9)

$$d_{nl} = \int_{L_1} P_l^{(-\alpha,-\beta)}(\tau)(1-\tau)^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta} h_n(\tau)\,d\tau,$$
$$F_l = \int_{L_1} P_l^{(-\alpha,-\beta)}(\tau)(1-\tau)^{-\alpha}(1+\tau)^{-\beta} f(\tau)\,d\tau.$$

Procédons à l'analyse de ce système en fonction de la valeur de $k$. Lorsque $k = -1$, l'équation (13.9) est résoluble, pourvu que soit vérifiée la condition d'orthogonalité qui s'écrit de la façon suivante:

$$\int_{L_1}\left[f(\tau) - \int_{L_1} k(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right]\frac{dt}{\omega(t)} = 0. \quad (13.10)$$

On peut montrer que la première équation du système (13.9) est équivalente à l'équation (13.10). Ceci étant, nous obtenons pour $N+1$ inconnues $a_n$ un système d'ordre $N+1$. Lorsque $k = 0$, le système est résoluble univoquement. Lorsque $k = 1$, on a $N+2$ inconnues et c'est pourquoi la solution du système ne sera pas univoque, aussi doit-on avoir recours à l'équation (13.4).

Passons à la considération d'équations intégrales singulières d'un type plus général que celles étudiées précédemment:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{L_1} k(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau+\int_{L_1} k_1(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t), \tag{13.11}$$

où le noyau complémentaire $k_1(t,\ \tau)$ est de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} c_k (t+1)^k \frac{d^k}{dt^k}(\tau-z_1)^{-1}+\sum_{j=0}^{m} b_j (1-t)^j \frac{d^j}{dt^j}(\tau-z_2)^{-1}.$$

Par $z_1$ et $z_2$ sont désignées respectivement les expressions $[(t+1)\,e^{i\theta_1}-1]$ et $[(t-1)\,e^{i\theta_2}+1]$, où $\theta_1$ et $\theta_2$ sont des constantes prises dans les intervalles $0<\theta_1<2\pi$ et $-\pi<\theta_2<\pi$. Des équations de ce type apparaissent en particulier dans la résolution des problèmes plans de la théorie de l'élasticité pour des surfaces présentant des coupures émergeant à l'extérieur ou sur la frontière de séparation des milieux.

Ces équations diffèrent de celles étudiées au ch. I par le fait qu'elles ne se ramènent pas au problème aux limites de Riemann, quoique dans ce cas aussi on peut affirmer que la solution s'avère également représentable sous la forme

$$\varphi(t)=g(t)\,(1-t)^{\alpha}\,(1+t)^{\beta}\qquad(-1<\mathrm{Re}\,\alpha,\ \mathrm{Re}\,\beta<1),$$

où $g(t)$ est une fonction de classe H-L et les constantes $\alpha$ et $\beta$ sont trouvées en analysant l'équation elle-même (en utilisant les propriétés des intégrales de type Cauchy sur les contours non fermés). Utilisons la formule d'intégration (A. H. Stroud, T. D. Secres *[1])

$$\int_{L_1} F(t,\ \tau)\,(1-\tau)^{\alpha}\,(1+\tau)^{\beta}\,d\tau\approx\sum_{k=1}^{N} W_k F(t_k,\ t), \tag{13.12}$$

où $t_k$ sont les racines des équations

$$P_N^{(\alpha,\beta)}(t_k)=0\qquad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ N),$$

et les facteurs de poids sont égaux à

$$W_k=-\frac{2N+\alpha+\beta+2}{(N+1)!\,(N+\alpha+\beta+1)}\cdot\frac{\Gamma(N+\alpha+1)\,\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}\times$$
$$\times\frac{2^{\alpha+\beta}}{P_N'^{(\alpha,\beta)}(t_k)\,P_{N+1}^{(\alpha,\beta)}(t_k)}.$$

L'utilisation de la formule (13.12) pour la résolution de l'équation intégrale par la méthode de collocation conduit au système

d'équations algébriques

$$\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N} g(t_k)\,W_k\left[\frac{1}{t_k-t_j^0}+K(t_j^0,\ t_k)+\pi k_1(t_j^0,\ t_k)\right]=f(t_j^0) \qquad (13.13)$$

$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ N-1).$$

Les points $t_j^0$ sont les zéros de l'équation

$$P_{N-1}^{(\alpha+1,\ \beta+1)}(t_j^0)=0,$$

$$-1<\operatorname{Re}\alpha,\quad \operatorname{Re}\beta<0 \quad (j=1,\ \ldots,\ N-1).$$

Pour d'autres contraintes imposées à $\alpha$ et $\beta$ les points $t_j^0$ se trouvent être les zéros des équations

$$P_{N+1}^{(\alpha-1,\ \beta-1)}(t_j^0)=0 \qquad (0<\operatorname{Re}\alpha<1, \quad 0<\operatorname{Re}\beta<1),$$

$$P_{N}^{(\alpha-1,\ \beta+1)}(t_j^0)=0 \qquad (0<\operatorname{Re}\alpha<1, \quad -1<\operatorname{Re}\beta<0),$$

$$P_{N}^{(\alpha+1,\ \beta-1)}(t_j^0)=0 \quad (-1<\operatorname{Re}\alpha<0, \quad 0<\operatorname{Re}\beta<1).$$

Remarquons que si $-1<\operatorname{Re}\alpha$, $\operatorname{Re}\beta<0$, il faut pour résoudre l'équation (13.13) faire appel à l'égalité (13.4) dont la réalisation approchée conduit à une autre relation

$$\sum_{k=1}^{N} g(t_k)\,W_k=A,$$

qui s'ajoute au système (13.13).

Passons à la définition des grandeurs $\alpha$ et $\beta$. Considérons l'intégrale de type Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{g(t)(1-t)^{\alpha}(1+t)^{\beta}}{t-z}\,dt.$$

Cette intégrale peut être représentée par

$$\Phi(z)=-g(-1)\,2^{\alpha}\frac{e^{-i\pi\beta}}{\sin\pi\beta}(z+1)^{\beta}+g(1)\,2^{\beta}\frac{1}{\sin\pi\alpha}\times$$

$$\times(z-1)^{\alpha}+\Phi_0(z), \qquad (13.14)$$

où la fonction $\Phi_0(z)$ est partout bornée sauf peut-être aux points $-1$ et $1$ où l'on admet des singularités d'ordre inférieur à $\operatorname{Re}\alpha$ et $\operatorname{Re}\beta$. Puis partant des formules de Sokhotski-Plemelj (2.9′) nous obtenons une représentation équivalente pour l'intégrale singulière

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{L_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,dt=$$

$$=-g(-1)\,2^{\alpha}\operatorname{cotg}\pi\beta\,(t+1)^{\beta}+g(1)\,2^{\beta}\operatorname{cotg}\pi\alpha\,(1-t)^{\alpha}+F_0(t), \qquad (13.15)$$

où le comportement de la fonction $F_0(t)$ est analogue à celui de la fonction $\Phi_0(z)$.

Considérons maintenant l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z_1}\,d\tau=\Phi(z_1).$$

Rappelons que les points $z_1$ se disposent sur une certaine courbe (segment) quand les points $t$ parcourent le segment $L_1$. Cette intégrale peut être représentée par

$$\Phi(z_1)=-g(-1)\,2^{\alpha}\,\frac{e^{-\pi i\beta}}{\sin\pi\beta}\,e^{i\beta\theta_1}(t+1)^{\beta}+F_1(t). \qquad (13.16)$$

Les propriétés de la fonction $F_1(t)$ au voisinage du point $-1$ sont évidentes.

Considérons maintenant l'identité

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\varphi(\tau)\,(t+1)^k\frac{d^k}{dt^k}(\tau-z_1)\,d\tau=(t+1)^k\frac{d^k}{dt^k}\Phi(z_1)$$

qui permet d'obtenir la représentation

$$\frac{1}{\pi}\int_{L_1}\varphi(\tau)\,(t+1)^k\frac{d^k}{dt^k}(\tau-z_1)\,d\tau=-g(-1)\,2^{\alpha}\,\frac{e^{-\pi i\beta}}{\sin\pi\beta}\times$$
$$\times\, e^{i\beta\theta_1}\beta(\beta-1)\,\ldots\,(\beta-k+1)\,(t+1)^{\beta}+(t+1)^k\frac{d^k}{dt^k}F_1(t).$$

Substituant les représentations qu'on vient d'obtenir dans l'équation (13.11), nous avons

$$-g(-1)\,2^{\alpha}\operatorname{cotg}\pi\beta\,(t+1)^{\beta}+g(1)\,2^{\beta}\operatorname{cotg}\pi\alpha\,(1-t)^{\alpha}+F_0(t)-$$
$$-c_0g(-1)\,2^{\alpha}\,\frac{e^{-\pi i\beta}}{\sin\pi\beta}\,e^{i\beta\theta_1}(t+1)^{\beta}+F_1(t)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}c_k\Big[-g(-1)\,2^{\alpha}\,\frac{e^{-\pi i\beta}}{\sin\pi\beta}\,e^{i\beta\theta_1}\beta(\beta-1)\,\ldots\,(\beta-k+1)\,(t+1)^{\beta}+$$
$$+(t+1)^k\frac{d^k}{dt^k}F_1(t)\Big]=f(t).$$

Le premier membre de l'équation étant borné partout et en particulier dans le voisinage du point $-1$, nous obtenons pour la détermination des grandeurs $\alpha$ et $\beta$ les équations

$$\operatorname{cotg}\pi\alpha=0,\qquad \alpha=-\frac{1}{2},$$

$$\cos\pi\beta+e^{i\beta(\theta_1-\pi)}\Big[c_0+\sum_{k=1}^{n}c_k\beta(\beta-1)\,\ldots\,(\beta-k+1)\Big]=0 \quad (13.17)$$

qui auraient été, bien entendu, plus volumineuses si les termes à coefficients $b_j$ avaient été gardés dans les équations (13.11). Notons que les questions générales concernant la résolution d'équations de ce genre sont étudiées par F. Erdogan *[2].

Indiquons que D. Sherman [26] a obtenu la solution exacte d'une équation concrète de la classe considérée. La singularité mise en évidence de cette solution coïncide avec celle qui a été définie à l'aide des équations (13.17).

L'approche exposée n'exclut pas l'avantage de la résolution directe des équations (13.11) par la méthode d'intégration mécanique. Il faut tenir compte du fait que lorsque la densité est mise en facteur dans chaque domaine partiel, les expressions restantes peuvent être intégrées sous forme explicite. Il est clair qu'il faut employer une subdivision plus fine au voisinage des extrémités.

Le procédé exposé plus haut est entièrement applicable quand les coefficients $c_k$ et $b_k$ font défaut (autrement dit, quand il est question d'équations singulières ordinaires). Citons l'article de A. Kalandia [4], dans lequel est étudiée l'équation

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,d\tau+\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}k(t,\ \tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=f(t) \qquad (13.18)$$

pour toutes les contraintes possibles imposées au comportement de la solution aux extrémités.

CHAPITRE III

# PRINCIPAUX FONDEMENTS DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ

## § 14. Problème spatial

Supposons qu'un corps élastique occupe dans l'espace à trois dimensions un domaine $D$ délimité par une surface fermée $S$. Si ce domaine est fini, nous le noterons $D^+$, s'il est illimité, $D^-$.

La résolution du problème de la théorie de l'élasticité consiste à déterminer en tout point $p$ (de coordonnées cartésiennes $x_1, x_2, x_3$) un vecteur $\boldsymbol{u}$ (de coordonnées cartésiennes $u_1, u_2, u_3$) caractérisant un petit déplacement de ce point au cours de la déformation du milieu.

Le champ vectoriel $\boldsymbol{u}(p)$ définit dans le corps le *tenseur de petites déformations*

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right] \quad (i,\ j=1,\ 2,\ 3). \qquad (14.1)$$

Ces déformations à leur tour définissent les composantes du *tenseur des contraintes*, lesquelles en vertu de la loi de Hooke et dans le cas d'un milieu isotrope peuvent être représentées sous la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}\theta + 2\mu\varepsilon_{ij}, \quad \theta = \operatorname{div} \boldsymbol{u}, \qquad (14.2)$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont les constantes physiques du milieu dites *constantes de Lamé* *).

Les composantes du tenseur des contraintes vérifient les *équations d'équilibre*

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}=0 \quad (i=1,\ 2,\ 3). \qquad (14.3)$$

On suppose ici que les forces de masse sont absentes.

Substituant dans (14.3) aux contraintes les dérivées du déplacement conformément à la loi de Hooke nous obtenons les équations dites *équations de Lamé*

$$\Delta^*\boldsymbol{u} = \mu\,\Delta\boldsymbol{u} + (\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0. \qquad (14.4)$$

---

*) En littérature technique on utilise plus souvent d'autres constantes: $E=\frac{(3\lambda+2\mu)\mu}{\lambda+\mu}$, le module d'Young, $\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$, le coefficient de Poisson que l'on suppose par la suite $0\leqslant\nu<0{,}5$.

Comme les déformations (il y en a six) représentent les dérivées de trois fonctions scalaires, elles sont liées entre elles par les six relations différentielles suivantes, appelées *conditions de compatibilité de Saint-Venant*:

$$2\frac{\partial^2\varepsilon_{ij}}{\partial x_i\,\partial x_j}=\frac{\partial^2\varepsilon_{ii}}{\partial x_j^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_{jj}}{\partial x_i^2}\quad (j\neq i),$$
$$\frac{\partial^2\varepsilon_{ii}}{\partial x_j\,\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{\partial\varepsilon_{jk}}{\partial x_i}+\frac{\partial\varepsilon_{ji}}{\partial x_k}+\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial x_j}\right)\quad (i\neq j\neq k). \tag{14.5}$$

Donnons-nous en un point arbitraire $p$ un plan défini par sa normale $\boldsymbol{n}$ ($n_{x_1}$, $n_{x_2}$, $n_{x_3}$ sont les cosinus directeurs). La connaissance des composantes du tenseur des contraintes et des cosinus directeurs permet d'obtenir l'expression des projections en ce point du vecteur des contraintes ($\sigma_{in}$ ($i = 1, 2, 3$)) appliqué au plan introduit. Nous avons

$$\sigma_{in} = \sigma_{ij}\cos(\boldsymbol{n}, x_j) \quad (i = 1, 2, 3). \tag{14.6}$$

La substitution dans (14.6) des composantes du tenseur des déformations conformément à (14.2) conduit à la représentation compacte du vecteur des contraintes

$$\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}(q)=2\mu\frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial n}+\lambda\boldsymbol{n}\operatorname{div}\boldsymbol{u}+\mu(\boldsymbol{n}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{u}), \tag{14.7}$$

directement par les déplacements. L'expression (14.7) s'écrit symboliquement comme le résultat d'action d'un certain opérateur $\boldsymbol{T}_n$ (opérateur des contraintes) sur le déplacement $\boldsymbol{u}$ ($\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}$). L'opérateur $\boldsymbol{T}_n$ peut être considéré non seulement aux points intérieurs du corps élastique, mais aussi être défini sur la surface frontière en tant que limite des valeurs dans l'ensemble des points intérieurs tendant vers le point limite correspondant, tout en exigeant par ailleurs que la direction des normales en tous les points intérieurs coïncide ou pour le moins tende vers la direction de la normale au point limite *).

Résoudre un problème de la théorie de l'élasticité c'est déterminer le champ des contraintes et le champ des déplacements (ou l'un d'eux si tel est le cas) conformément aux équations rapportées ci-dessus et en fonction des différentes conditions aux limites données sur la surface.

Le problème est dit *premier problème fondamental* quand sur la surface sont données les valeurs limites du vecteur des déplacements. Le problème est dit *deuxième problème fondamental* quand sur la surface sont données les valeurs limites de l'opérateur $\boldsymbol{T}_n$. Dans tous ces cas nous désignerons les conditions aux limites de la même façon

*) Ceci concerne seuls les points de la surface $S$ auxquels le plan tangent est défini univoquement.

par $f(q)$. D'autres positions des problèmes aux limites sont possibles également. Ainsi, par exemple, sur une partie de la surface $S$ peuvent être donnés les déplacements, et sur la partie restante les contraintes (*problème mixte* ou *de contact*). Dans nombre de cas les conditions aux limites sont données sous forme de relations définies entre les déplacements et les contraintes. On peut donner, par exemple, la valeur de la composante normale du déplacement et celles des composantes tangentielles des contraintes.

Les problèmes de la théorie de l'élasticité peuvent être résolus directement en déplacements à partir des équations (14.4), se conformant d'ailleurs aux conditions initiales et déterminant à la dernière étape les valeurs des contraintes. Si au cours de la résolution les composantes du tenseur des contraintes sont déterminées d'emblée, il convient alors d'adjoindre aux équations (14.3) les équations de compatibilité des déformations en contraintes (dites *équations de Beltrami-Mitchell*) obtenues des équations (14.5) en remplaçant les déformations par les contraintes.

L'appareil mathématique utilisé dans ce livre nous oblige à supposer que les *composantes des déplacements sont continues et continûment dérivables dans un domaine fermé* (y compris la surface $S$) *et leurs dérivées secondes ne sont continues que dans le domaine ouvert* (*solution régulière*).

Considérons quelques théorèmes généraux qui seront nécessaires par la suite. Introduisons au préalable la notion de *contrainte généralisée* $\sigma^*$, définissant ses composantes de la façon suivante:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{jk} &= \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \quad (j \neq k), \\ \sigma^*_{jj} &= (\lambda + \mu - \alpha) \operatorname{div} \boldsymbol{u} + (\alpha + \mu) \frac{\partial u_j}{\partial x_j}, \end{aligned} \tag{14.8}$$

où $\alpha$ est une constante arbitraire.

Le tenseur des contraintes généralisées engendre à son tour l'opérateur des contraintes généralisées, agissant dans le plan dont la normale est $\boldsymbol{n}$:

$$\boldsymbol{P}_n \boldsymbol{u} = (\alpha + \mu) \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n} + (\lambda + \mu - \alpha) \boldsymbol{n} \operatorname{div} \boldsymbol{u} + \alpha (\boldsymbol{n} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{u}). \tag{14.9}$$

Il est évident que pour $\alpha = \mu$ on retrouve l'opérateur $\boldsymbol{T}_n$.

Soient $\boldsymbol{u}(p)$ et $\boldsymbol{v}(p)$ les déplacements donnés dans le domaine $D^+$. Formons le produit scalaire des valeurs $\boldsymbol{u}(p)$ et $\boldsymbol{P}_n \boldsymbol{v}(p)$:

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{P}_n \boldsymbol{v} = Q_1 \cos(\boldsymbol{n}, x_1) + Q_2 \cos(\boldsymbol{n}, x_2) + Q_3 \cos(\boldsymbol{n}, x_3), \tag{14.10}$$

$$Q_i = \sigma^*_{ji} u_j \quad (i = 1, 2, 3).$$

Considérant $Q_i$ comme les composantes d'un certain vecteur $Q$ $(Q_1, Q_2, Q_3)$, calculons sa divergence:

$$\operatorname{div} Q = \frac{\partial \sigma^*_{jk}}{\partial x_k} u_j + E(u, v). \tag{14.11}$$

L'expression $E(u, v)$ est une forme bilinéaire symétrique

$$E(u, v) = (\lambda + 2\mu) \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + $$
$$+ (\lambda + \mu - \alpha) \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \alpha \sum_{i \neq k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Utilisant (14.8), nous nous assurons par différentiation immédiate que la double somme présente dans (14.11) est le produit scalaire $u \cdot \Delta^* v$.

On obtient donc

$$\operatorname{div} Q = u \cdot \Delta^* v + E(u, v). \tag{14.12}$$

En étendant l'intégration de l'identité (14.12) au volume et appliquant la formule de Gauss-Ostrogradski, nous trouvons

$$\int_{D^+} u \cdot \Delta^* v \, d\Omega = \int_{S} u \cdot P_n v \, dS - \int_{D^+} E(u, v) \, d\Omega, \tag{14.13}$$

qui est l'analogue de la formule de Green, dite en théorie de l'élasticité *première formule généralisée de Betti.* Posant dans la formule (14.13) $u = v$, nous sommes conduits à la *seconde formule généralisée de Betti*:

$$\int_{D^+} u \cdot \Delta^* u \, d\Omega = \int_{S} u \cdot P_n u \, dS - \int_{D^+} E(u, u) \, d\Omega. \tag{14.14}$$

Changeant de place les déplacements $u$ et $v$ et tenant compte de la symétrie de la forme bilinéaire $E(u, v)$, nous parvenons à la *troisième formule généralisée de Betti*:

$$\int_{D^+} \{u \cdot \Delta^* v - v \cdot \Delta^* u\} \, d\Omega = \int_{S} \{u \cdot P_n v - v \cdot P_n u\} \, dS. \tag{14.15}$$

Il est évident que posant maintenant $\alpha = \mu$ nous retrouvons les formules usuelles de Betti (cf. J. N. Steddon, D. S. Berry *[1]). La forme $E(u, u)$ s'écrit alors:

$$E(u, u) = 2\mu \left[ 2 \left\{ \left( \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 \right\} + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{3} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right)^2 \right] + \lambda (\operatorname{div} u)^2, \tag{14.16}$$

ce qui montre qu'elle est définie positive.

Signalons l'intérêt du cas $\alpha = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}$. Introduisons pour l'opérateur des pseudocontraintes la notation spéciale $N_{\varkappa}$. La forme bilinéaire qui lui correspond est aussi définie positive:

$$2\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)^2+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2+\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)^2\right]+$$
$$+\frac{2\mu}{\lambda+3\mu}\sum_{k=1}^{3}(\operatorname{grad} u_k)^2+\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\lambda+3\mu}(\operatorname{div} u)^2. \qquad (14.17)$$

Il est évident que les formules de Betti sont valables également pour un domaine délimité par plusieurs surfaces. En effet, si l'on exige pour le domaine $D^-$ que les déplacements décroissent à l'infini comme $1/R$ et les déformations comme $1/R^2$, les formules citées sont applicables dans ce cas aussi (avec le changement correspondant du signe précédant l'opérateur des contraintes). La démonstration est, comme en théorie classique du potentiel, fondée sur la considération d'un domaine délimité de l'intérieur par la surface $S$ et de l'extérieur par une surface de dimensions suffisamment grandes (cf. N. Gunter [1]): on procède à une analyse des termes correspondant à cette surface auxiliaire quand elle augmente indéfiniment et on montre qu'ils tendent vers zéro.

Du fait que les formes quadratiques (14.16) et (14.17) sont définies positives découlent immédiatement les théorèmes d'univocité: en effet, vu la linéarité des équations, la question se ramène à celle de l'existence de solutions non triviales dans le cas de conditions aux limites homogènes.

Considérons le premier problème fondamental pour le domaine $D^+$ et des conditions aux limites nulles. Soit $u_0(p)$ une solution non triviale. Dans ce cas deux intégrales s'annulent (par hypothèse) dans la formule (14.14) et par conséquent la troisième intégrale doit aussi s'annuler, ce qui entraîne une valeur identiquement nulle de l'expression sous le signe d'intégration, autrement dit de la forme $E(u_0, u_0)$. Seul le vecteur définissant le déplacement du corps en tant qu'ensemble rigide, et lui seul, annule la forme $E(u_0, u_0)$. Puisque les déplacements doivent par ailleurs s'annuler sur la surface, ils seront donc identiquement nuls dans tout le domaine.

Ces raisonnements démontrent immédiatement le théorème d'univocité pour le second problème fondamental aussi. Les déplacements peuvent dans ce cas ne pas s'annuler et correspondre à un déplacement rigide du corps

$$u_1 = a_1 + qx_3 - rx_2, \quad u_2 = a_2 + rx_1 - px_3,$$
$$u_3 = a_3 + px_2 - qx_1, \qquad (14.18)$$

où $a_1$, $a_2$, $a_3$, $p$, $q$, $r$ sont des constantes arbitraires. Les contraintes correspondantes, elles, sont nulles.

Pour un domaine infini les deux problèmes n'auront qu'une solution nulle (même en déplacements) puisque les déplacements (14.18) ne satisfont pas la restriction adoptée au sujet du comportement des déplacements à l'infini afin d'établir les formules précédentes.

D'une manière analogue on étudiera la question de l'univocité de la solution du problème lorsque l'opérateur $N_n$ s'annule sur la surface. Cette question (intéressante du point de vue mathématique seulement) nous est nécessaire pour la suite. L'analyse de la forme positive (14.17) montrera que la solution non triviale du problème intérieur s'écrit

$$u_1 = a_1, \quad u_2 = a_2, \quad u_3 = a_3, \tag{14.19}$$

où $a_1$, $a_2$, $a_3$ sont des constantes arbitraires.

Le problème extérieur, lui, n'admet pas de solution non triviale.

Considérons l'espace rempli d'un milieu élastique dont les constantes de Lamé sont $\lambda$ et $\mu$. Supposons que le point $p$ $(y_1, y_2, y_3)$ est sollicité par une force concentrée de grandeur unitaire, dirigée le long de l'axe 1. Dans ce cas, d'après la formule de Kelvin-Somigliana (cf. par exemple A. Lurié [1]) les déplacements en tout point $p_i$ $(x_1, x_2, x_3)$ différent de $p$ s'expriment par les formules

$$u_i^1 = \frac{\lambda+\mu}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[\frac{(x_i-y_i)(x_1-y_1)}{r^3} + \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\frac{\delta_{i1}}{r}\right] \quad (i = 1, 2, 3), \tag{14.20}$$

où

$$r = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2};$$

d'une autre façon

$$u_i^1 = \frac{1}{8\pi\mu(\lambda+2\mu)}\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial r}{\partial x_i}\frac{\partial r}{\partial x_1} + (\lambda+3\mu)\delta_{i1}\right]\frac{1}{r}. \tag{14.20'}$$

Par substitution cyclique on peut obtenir les expressions des déplacements $u_i^2$ et $u_i^3$ quand la force est dirigée le long de l'axe 2 ou le long de l'axe 3.

Considérons à présent le cas général. Soit le point $p$ sollicité par la force $\varphi$ $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$. On peut alors représenter les déplacements au point $p_1$ sous la forme du produit d'une certaine matrice $\Gamma(p_1, p)$, dite *matrice de Kelvin-Somigliana* (d'éléments $\Gamma_{ij} = u_i^j$), par le vecteur $\varphi(p)$.

Ainsi

$$u(p_1) = \Gamma(p_1, p)\,\varphi(p) \tag{14.21}$$

ou sous forme développée

$$u_1 = \Gamma_{11}\varphi_1 + \Gamma_{12}\varphi_2 + \Gamma_{13}\varphi_3,$$
$$u_2 = \Gamma_{21}\varphi_1 + \Gamma_{22}\varphi_2 + \Gamma_{23}\varphi_3,$$
$$u_3 = \Gamma_{31}\varphi_1 + \Gamma_{32}\varphi_2 + \Gamma_{33}\varphi_3.$$

Par la suite, on appellera matrice de Kelvin-Somigliana (en conservant les mêmes notations) également la matrice qui s'obtient de la matrice initiale en la multipliant par 2, ce qui est commode pour l'écriture des équations intégrales obtenues à son aide. Menons ensuite par le point $p_1$ un plan de normale $\boldsymbol{n}$ $(n_{x_1}, n_{x_2}, n_{x_3})$ et déterminons le vecteur des contraintes agissant sur ce plan au point $p_1$. Il découle de (14.21) que l'expression recherchée s'écrira sous la forme du produit d'une certaine matrice $\boldsymbol{\Gamma}_1(p_1, p) = T_{n(p_1)}\boldsymbol{\Gamma}(p_1, p)$ par le vecteur $\varphi(p)$. Utilisant (14.7) nous parvenons, après des transformations assez volumineuses, à l'expression des éléments de la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_1(p_1, p)$:

$$\left\| \begin{matrix} m+n\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & n\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_1} & n\frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_1} \\ n\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & m+n\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 & n\frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_2} \\ n\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} & n\frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} & m+n\left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^2 \end{matrix} \right\| \frac{d}{dn(p_1)}\frac{1}{r(p_1, p)} +$$
$$+ m \left\| \begin{matrix} 0 & \omega_{12}(p_1, p) & \omega_{13}(p_1, p) \\ -\omega_{12}(p_1, p) & 0 & \omega_{23}(p_1, p) \\ -\omega_{13}(p_1, p) & -\omega_{23}(p_1, p) & 0 \end{matrix} \right\|, \qquad (14.22)$$

où

$$m = \frac{1}{2\pi}\frac{\mu}{\lambda+2\mu}, \quad n = \frac{3}{2\pi}\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}, \quad \omega_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r}\right) n_j(p_1) - $$
$$- \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{r}\right) n_i(p_1).$$

Reportons-nous maintenant à la troisième formule de Betti (14.15), posant pour fixer les idées $\alpha = \mu$. Soit $p$ un certain point situé dans le domaine $D^+$ délimité par la surface $S$. Construisons une sphère $\sigma_\varepsilon$ de rayon $\varepsilon$ suffisamment petit, centrée au point $p$. Considérons le domaine $D_\varepsilon^+$, disposé entre les surfaces $S$ et $\sigma_\varepsilon$. Appliquons la formule de Betti au déplacement $\boldsymbol{u}(p_1)$ vérifiant l'équation de Lamé dans le domaine $D^+$ et au déplacement $\boldsymbol{v}(p_1)$ engendré par la force $\boldsymbol{a}_i$ (c'est-à-dire par le vecteur dont la $i$-ième composante vaut l'unité et les autres, zéro) appliquée au point $p$. On a naturellement la représentation

$$\boldsymbol{v}(p_1) = \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p)\, \boldsymbol{a}_i.$$

Posons tout d'abord $i = 1$, puis d'une manière analogue considérons les cas de $i = 2$ et 3. Tout d'abord, il est aisé de voir que les intégrales de volume disparaissent dans la formule de Betti. Puis, comme le déplacement $v(p_1)$ admet au voisinage du point $p$ un pôle de premier ordre et les contraintes correspondant au déplacement $u(p_1)$ sont bornées, nous pouvons affirmer que l'intégrale

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p)\, \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{T}_{n(p_1)} \boldsymbol{u}(p_1)\, dS_{p_1}$$

tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, de sorte que nous l'excluons de notre étude ultérieure. Quant à l'intégrale

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \{\boldsymbol{T}_{n(p_1)} \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p)\, \boldsymbol{a}_1\}\, \boldsymbol{u}(p_1)\, dS_{p_1}, \tag{14.23}$$

son calcul se ramène à celui de l'intégrale

$$\int_{\sigma_\varepsilon} \{\boldsymbol{T}_{n(p_1)} \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p)\, \boldsymbol{a}_1\}\, dS_{p_1} = \int_{\sigma_\varepsilon} \boldsymbol{\Gamma}_1(p_1, p)\, \boldsymbol{a}_1\, dS_{p_1} \tag{14.24}$$

puisque le déplacement $\boldsymbol{u}(p_1)$ est continu au voisinage du point $p$. Comme la surface $\sigma_\varepsilon$ est une sphère, nous adoptons un système de coordonnées sphériques pour le calcul de l'intégrale des composantes de la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_1(p_1, p)$ de (14.22). On obtient aisément les égalités suivantes:

$$\begin{gathered}
\int_{\sigma_\varepsilon} \frac{d}{dn} \frac{1}{r(p_1, p)}\, dS_{p_1} = -4\pi, \\
\int_{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial r}{\partial x_j}\right) \frac{d}{dn} \frac{1}{r(p_1, p)}\, dS_{p_1} = 0 \quad (i \neq j), \\
\int_{\sigma_\varepsilon} \left(\frac{\partial r}{\partial x_i}\right)^2 \frac{d}{dn} \frac{1}{r(p_1, p)}\, dS_{p_1} = -\frac{4}{3}\pi, \quad \int_{\sigma_\varepsilon} \omega_{ij}\, dS_{p_1} = 0.
\end{gathered} \tag{14.25}$$

Les fonctions $\omega_{ij}$ étant impaires, les intégrales de ces fonctions sont nulles.

Ainsi donc (compte tenu de (14.25)), la troisième formule de Betti conduit à la représentation

$$2u_1(p) = -\int_S \boldsymbol{T}_{n(p_1)} \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p) \cdot \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{u}(p_1)\, dS_{p_1} + \int_S \boldsymbol{\Gamma}(p_1, p) \cdot \boldsymbol{a}_1 \boldsymbol{T}_{n(p_1)} \boldsymbol{u}(p_1)\, dS_{p_1}. \tag{14.26}$$

Répétant les raisonnements précédents pour $i = 2$ et 3 nous obtenons des représentations analogues pour les vecteurs $\boldsymbol{a}_2$ et $\boldsymbol{a}_3$. On peut écrire ces représentations sous une forme analytique unique (avec un changement d'arguments tout à fait évident)

$$2\boldsymbol{u}(p) = -\int_S \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\boldsymbol{u}(q)\,dS_q + \int_S \boldsymbol{\Gamma}(p, q)\,\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}(q)\,dS_q, \tag{14.27}$$

où la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)$ est la matrice conjuguée de la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_1(p, q)$ (c'est-à-dire obtenue de celle-ci par permutation de ses arguments et transposition). Vu l'importance que ceci a pour la suite, nous rapportons l'expression développée des éléments de la matrice $\boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)$:

$$\boldsymbol{\Gamma}_{2(k,j)}^{\mathrm{I}}(p, q) =$$

$$= \left[m\delta_{k,j} + 3n\frac{(y_k - x_k)(y_j - x_j)}{r^2}\right]\frac{\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(q)}{r^3} + m\left[n_k(q)\frac{(x_j - y_j)}{r^3} - n_j(q)\frac{(x_k - y_k)}{r^3}\right]. \tag{14.28}$$

Soit maintenant un point $p$ choisi dans le domaine $D^-$. De la troisième formule de Betti découle directement la relation

$$0 = -\int_S \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\boldsymbol{u}(q)\,dS_q + \int_S \boldsymbol{\Gamma}(p, q)\,\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}(q)\,dS_q. \tag{14.29}$$

Dans ce cas, comme auparavant, la fonction vecteur $\boldsymbol{u}(p)$ vérifie les équations de Lamé dans le domaine $D^+$.

Des constructions analogues sont possibles également dans le cas où le déplacement $\boldsymbol{u}(p)$ est défini dans le domaine $D^-$ (en imposant les mêmes restrictions que précédemment au comportement à l'infini). Les formules correspondantes sont de la forme:

$$2\boldsymbol{u}(p) = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\boldsymbol{u}(q)\,dS_q - \int_S \boldsymbol{\Gamma}(p, q)\,\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}(q)\,dS_q \quad (p \in D^-), \tag{14.30}$$

$$0 = \int_S \boldsymbol{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\boldsymbol{u}(q)\,dS_q - \int_S \boldsymbol{\Gamma}(p, q)\,\boldsymbol{T}_n\boldsymbol{u}(q)\,dS_q \quad (p \in D^+). \tag{14.30'}$$

Dans le cas de l'opérateur $N$ on peut montrer, répétant toutes les transformations effectuées précédemment, qu'ont lieu des for-

mules analogues à (14.27), (14.29) et (14.30):

$$2u(p) = -\int_S \Gamma_2^{II}(p, q)\, u(q)\, dS_q + \int_S \Gamma(p, q)\, N_n u(q)\, dS_q \quad (p \in D^+),$$

$$0 = -\int_S \Gamma_2^{II}(p, q)\, u(q)\, dS_q + \int_S \Gamma(p, q)\, N_n u(q)\, dS_q \quad (p \in D^-); \tag{14.31}$$

$$2u(p) = \int_S \Gamma_2^{II}(p, q)\, u(q)\, dS_q - \int_S \Gamma(p, q)\, N_n u(q)\, dS_q \quad (p \in D^+), \tag{14.32}$$

$$0 = \int_S \Gamma_2^{II}(p, q)\, u(q)\, dS_q - \int_S \Gamma(p, q)\, N_n u(q)\, dS_q \quad (p \in D^-).$$

Plus haut (14.9) le produit $N_n(q)\,\Gamma(p, q)$ a été désigné par la matrice $\Gamma_2^{II}(p, q)$. Explicitons cette matrice:

$$\Gamma_2^{II}(p, q) = \left\| \begin{matrix} m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & n_1 \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & n_1 \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ n_1 \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_1} & m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 & n_1 \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ n_1 \frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_1} & n_1 \frac{\partial r}{\partial x_3}\frac{\partial r}{\partial x_2} & m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^2 \end{matrix} \right\| \times \frac{d}{dn_p}\frac{1}{r}, \tag{14.33}$$

$$m_1 = \frac{2}{\lambda + 3\mu}, \quad n_1 = \frac{3(\lambda + \mu)}{\mu(\lambda + 3\mu)}.$$

Portons notre attention sur le fait que les termes avec des pôles de second ordre ne sont pas présents dans la matrice (14.33). La matrice $\Gamma_2^{II}(p, q)$ (*matrice de deuxième espèce*), aussi bien que la matrice $\Gamma_1^{II}(p, q)$ (*matrice de première espèce*), sera utilisée par la suite. Les notations de ces matrices, incompréhensibles pour le moment, deviendront claires plus loin (ch. VI). Remarquons que l'on a des formules analogues pour toute valeur de $\alpha$ dans l'opérateur $P_n$.

Voyons comment se présente une *matrice de troisième espèce*. Soit $S$ une surface telle que la normale extérieure en n'importe lequel de ses points ne la coupe plus. Soient $q$ un point situé sur $S$ et $p$ un point arbitraire. Ayons recours à la fonction

$$v(p, q) = r\cos(r_0, n_p)\ln[r + r\cos(r_0, n_p)] - r, \tag{14.34}$$

où $\boldsymbol{n}_p$ est le vecteur unité de la normale intérieure au point $p$, $\boldsymbol{r}_0$ le vecteur unité du segment mené de $p$ à $q$. Il apparaît de (14.34) que la fonction $v(p, q)$ ne dépend pas de la disposition du système de coordonnées. Choisissons-le, pour simplifier l'écriture, avec son origine au point $p$, la direction positive de l'axe $x_1$ coïncidant avec la normale intérieure. La relation (14.34) (en coordonnées locales) s'écrit alors

$$v = x_1 \ln (r + x_1) - r. \tag{14.34'}$$

Il est évident qu'aux points intérieurs à la surface $S$ la fonction $v(p, q)$ aura toujours un sens, vu l'inégalité $r + x_1 \neq 0$.

Formons à l'aide de cette fonction la matrice

$$\boldsymbol{Z}(p, q) = \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} & -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & -\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_3^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} \end{matrix} \right\|. \tag{14.35}$$

Des calculs immédiats nous assurent que chaque colonne de cette matrice, considérée comme vecteur, vérifie les équations de Lamé (14.4).

Passons maintenant à la nouvelle matrice

$$\boldsymbol{M}(p, q) = \frac{1}{3(\lambda+\mu)} \left[ \frac{1}{2} \boldsymbol{Z}(p, q) - (\lambda + 2\mu) \boldsymbol{\Gamma}(p, q) \right], \tag{14.36}$$

introduite par H. Weyl *[1]). La solution fondamentale correspondant à la matrice (14.36) diffère des précédentes par le fait que sa construction nécessite pour le moins la donnée locale d'une certaine surface. A part cela, cette solution fondamentale ne vérifie pas les conditions à l'infini.

Abordons la position du problème de la théorie de l'élasticité pour un milieu homogène par morceaux. Supposons qu'un corps élastique (fini ou infini) comporte des cavités remplies de corps élastiques des mêmes dimensions, mais avec des valeurs différentes de coefficients de Lamé. Diverses conditions de conjugaison sont alors possibles sur les surfaces de contact des milieux. Par exemple le vecteur des déplacements (faisant parfois défaut), ou sa composante normale, peut admettre une discontinuité, alors que le vecteur des contraintes n'en subit pas. La formation d'un interstice entre les corps élastiques (en une certaine partie de la surface) est également admissible. Alors sur la partie restante de la surface, dont les éléments sont en contact, le vecteur des contraintes est supposé comme auparavant continu, alors que le vecteur des déplacements peut admettre une discontinuité donnée. Une autre condition est réalisée

lorsque sur les côtés de la cavité formée sont données les contraintes (comme règle, nulles). Les conditions permettant de définir les dimensions de la cavité sont trouvées de l'exigence que sur la partie restante de la surface le signe de la contrainte normale soit partout négatif (c'est-à-dire qu'il y ait compression). Il n'est pas nécessaire que la courbe de séparation des milieux soit disposée rigoureusement à l'intérieur du domaine global. Une ou quelques-unes de ces courbes peuvent par leurs extrémités émerger sur les frontières extérieures, tandis qu'à la frontière de séparation différentes conditions sont possibles.

## § 15. Problème plan

Considérons le cas où toutes les composantes des contraintes et des déplacements dépendent de deux coordonnées $x_1 = x$ et $x_2 = y$ seulement, et le déplacement $u_3 = w \equiv 0$. Il découle immédiatement des égalités (14.1) et (14.2) que les déformations $\varepsilon_{13} = \gamma_{xz}$, $\varepsilon_{23} = \gamma_{yz}$, $\varepsilon_{33} = \varepsilon_z$ et les contraintes $\sigma_{13} = \tau_{xz}$, $\sigma_{23} = \tau_{yz}$ sont nulles. La troisième équation d'équilibre, (14.3), est automatiquement vérifiée, alors que les deux premières prennent la forme

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0. \qquad (15.1)$$

Quand $\varepsilon_z = 0$, la loi de Hooke donne lieu à l'égalité

$$\sigma_z = \lambda\theta = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} (\sigma_x + \sigma_y).$$

Les relations entre déformations et contraintes deviennent

$$\sigma_x = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \\ + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right). \qquad (15.2)$$

Toutes les équations de compatibilité des déformations (14.5) sont vérifiées automatiquement. La troisième équation, elle, conduit à la forme

$$\Delta (\sigma_x + \sigma_y) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \qquad (15.3)$$

Considérons un plan dont la normale $n$ soit située dans le plan $xy$. Les contraintes sollicitant ce plan seront alors

$$\sigma_{xn} = \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y), \\ \sigma_{yn} = \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y), \quad \sigma_{zn} \equiv 0. \qquad (15.4)$$

Cet état est réalisé dans les corps cylindriques s'étendant indéfiniment dans le sens de l'axe $z$ quand les contraintes extérieures $\sigma_{xn}$

et $\sigma_{yn}$ ou les déplacements $u$ et $v$ à la surface sont constants le long des génératrices. Dans le cas d'une étendue finie le long de l'axe $z$ il faut absolument que le déplacement $w$ et les contraintes tangentielles $\tau_{xz}$ et $\tau_{yz}$ soient nuls sur les bords.

Il est naturel de chercher la solution des problèmes de ce genre dans une section transversale quelconque seulement. Nous introduirons la notation $D$ pour le domaine occupé par la section, celle de $L$ pour le contour délimitant ce domaine. L'état que l'on a décrit s'appelle *déformation plane.*

Considérons à présent un autre état, dit *état plan de contrainte.* Soit un cylindre de faible épaisseur. Choisissons les axes de coordonnées de sorte que le plan $xy$ coïncide avec le plan médian du cylindre que nous appellerons dans ce qui suit lame. Supposons que les bords soient libres de contraintes ($\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} \equiv 0$), et que la résultante des contraintes sur la génératrice soit située dans le plan $xy$. En vertu du principe de Saint-Venant nous admettrons que les contraintes et les déplacements loin du bord se comportent comme si les contraintes $\sigma_{xn}$ et $\sigma_{yn}$ étaient distribuées uniformément suivant la hauteur, et les contraintes $\sigma_{zn} = 0$.

Les hypothèses faites permettent de considérer approximativement les contraintes $\sigma_x$, $\sigma_y$ et $\tau_{xy}$ et les déplacements $u$ et $v$ fonctions des coordonnées $x$ et $y$ seulement et les contraintes $\sigma_z$, $\tau_{xz}$ et $\tau_{yz}$ nulles. Il est évident qu'alors les équations d'équilibre coïncideront avec les équations (15.1) et les relations entre déplacements et contraintes prendront la forme

$$\sigma_x = \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = \lambda^* \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y},$$
$$\tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \quad \lambda^* = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}, \tag{15.5}$$

en vertu de quoi l'équation de compatibilité des déformations coïncidera avec l'équation (15.3). Par conséquent, l'état plan de déformation et l'état plan de contrainte se décrivent par les mêmes équations différentielles, différant uniquement par les relations entre contraintes et déformations. C'est pourquoi, par la suite, leur étude sera conduite simultanément (sans préciser le cas).

Donc, la résolution du problème plan se ramène à la résolution du système d'équations (15.1) et (15.3). Introduisons la *fonction des contraintes d'Airy* $U$ $(x, y)$ au moyen de laquelle les composantes des contraintes s'expriment de la manière suivante:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}. \tag{15.6}$$

Par substitution immédiate nous nous assurons que les deux premières équations du système deviennent identité, alors que la troi-

sième se ramène à l'équation biharmonique

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 U(x,\ y)=\Delta^2 U=0. \qquad (15.7)$$

Par conséquent, le problème plan de la théorie de l'élasticité se ramène à la résolution de l'équation (15.7). En vertu de la formule de Goursat (cf. N. Muskhelishvili [3]), une fonction biharmonique quelconque dans tel ou autre domaine peut être exprimée au moyen de deux fonctions analytiques dans le même domaine:

$$U(x,\ y) = \operatorname{Re}\,[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad (z = x + iy), \qquad (15.8)$$

où $\varphi(z)$, $\chi(z)$ sont des fonctions analytiques dans $D$.

A l'aide des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ ($\psi(z) = \chi'(z)$) les composantes du tenseur des contraintes s'expriment de la manière suivante:

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\operatorname{Re}\,\varphi'(z) = 4\operatorname{Re}\,[\Phi(z)],$$

$$\begin{gathered}\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] = \\ = 2\,[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)], \\ \Phi(z) = \varphi'(z), \quad \Psi(z) = \psi'(z).\end{gathered} \qquad (15.9)$$

Ce sont les *formules* bien connues *de Kolossov-Muskhelishvili.*

Les composantes des déplacements sont dans ce cas:

$$2\mu(u+iv) = \varkappa\varphi(z) - \overline{z\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \qquad (15.10)$$

où

$$\varkappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3-4\nu, \quad \varkappa = \frac{\lambda^*+3\mu}{\lambda^*+\mu} = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

pour une déformation plane et un état plan de contrainte respectivement.

Exprimer les conditions aux limites relatives aux contraintes découlant de (15.4) directement au moyen des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ est difficile. L'écriture de ces conditions sous une autre forme s'avère plus compacte. Considérons dans le domaine occupé par le corps élastique un arc $L'$ d'extrémités $a$ et $b$. Déterminons le vecteur résultant $X + iY$ des efforts appliqués du côté de la normale positive à l'arc $L'$. On a dans ce cas l'égalité

$$X + iY = \int_{L'} (X_n + iY_n)\,ds = -i\,[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]_b^a. \qquad (15.11)$$

Supposons que l'arc $L'$ appartient à la frontière du domaine, c'est-à-dire au contour $L$. Fixons le point $a$ et supposons le point $b$ variable. Nous sommes alors conduits à la représentation de la con-

dition à la limite sous la forme suivante:

$$\varphi(z)=z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_a^z (X_n+iY_n)\,ds+\text{const.} \qquad (15.12)$$

Il est naturel de supposer que les déplacements et les contraintes, déterminés au cours de la résolution, soient des fonctions univoques. Dans le cas d'un domaine simplement connexe (fini) ces restrictions sont équivalentes à l'univocité des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$. Dans les autres cas (plan fini ou infini comportant $m$ trous) on doit admettre que ces fonctions possèdent des termes multivalents:

$$\begin{aligned}\varphi(z)&=-\frac{1}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)\ln(z-z_k)+\varphi^*(z),\\ \psi(z)&=\frac{\varkappa}{2\pi(1+\varkappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)\ln(z-z_k)+\psi^*(z).\end{aligned} \qquad (15.13)$$

Ici $z_k$ sont des points disposés arbitrairement à l'intérieur de chacun des contours frontière (intérieurs) $L_k$; $X_k$ et $Y_k$, les composantes du vecteur résultant des efforts appliqués au contour $L_k$. Les fonctions $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$ s'avèrent des fonctions analytiques univoques.

Introduisons une restriction purement mathématique. Nous ferons l'étude uniquement des solutions dites régulières, lorsque les fonctions $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions à prolongement continu aux points frontière.

Passons à la position des problèmes aux limites de la théorie des fonctions analytiques correspondant aux premier et deuxième problèmes fondamentaux (conformément à la terminologie introduite au § 14). Nous nous limiterons tout d'abord au cas d'un domaine $D$ (fini) simplement connexe, limité par un contour fermé différentiable $L$.

Supposons que sur le contour $L$ sont données les contraintes $X_n$ et $Y_n$ (deuxième problème fondamental). Reportons-nous à la condition (15.12), supposant que les points $z$ sont situés sur le contour $L$. Désignons ensuite par $t$ les points du plan de la variable complexe disposés sur les contours frontière. Comme le second membre de la formule (15.12) peut être calculé d'une façon quelconque, la résolution du problème de la théorie de l'élasticité se ramène à la détermination des fonctions analytiques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ vérifiant la relation à la limite

$$\varphi(t)+\overline{t\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=i\int_{t_0}^{t}(X_n+iY_n)\,ds+\text{const}=f(t)+\text{const}. \qquad (15.14)$$

La valeur de la constante n'a pas d'importance puisque lorsqu'on détermine les contraintes d'après la formule (15.9), les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ doivent être dérivées, et lorsqu'on détermine les déplacements conformément à (15.10), le choix de la constante n'aura d'influence que sur le déplacement du corps en tant qu'un tout rigide.

On obtient d'une façon analogue le problème aux limites pour les fonctions analytiques $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ et des déplacements définis sur le contour (premier problème fondamental):

$$\varkappa\varphi(t)-\overline{t\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}=\frac{1}{2\mu}[q_1(t)+iq_2(t)]=f(t), \qquad (15.15)$$

où $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont des fonctions données.

Lorsqu'on se propose de résoudre les problèmes concernant des domaines multiconnexes il faut, pour que la condition aux limites modifiée devienne univoque, passer à des fonctions analytiques univoques conformément à (15.13). Dans le cas du deuxième problème fondamental les constantes $X_k$ et $Y_k$ sont tirées des conditions aux limites. Les constantes qui entreront dans les conditions aux limites (15.14), transposées maintenant à tous les contours $L_k$, ne peuvent pas être données arbitrairement (à l'exception d'une) et seront déterminées au cours de la résolution du problème.

Arrêtons-nous succinctement sur la position des problèmes spaciaux de la théorie de l'élasticité pour des corps homogènes par morceaux, dans le cas d'une déformation plane. Pour simplifier l'exposé nous considérerons le cas d'un domaine $D_1$, délimité de l'extérieur par le contour $L_1$ et de l'intérieur par le contour $L_0$, rempli d'un milieu élastique de paramètres $\varkappa_1$ et $\mu_1$. A l'intérieur du contour $L_0$ (domaine $D_0$) se trouve un milieu élastique de paramètres $\varkappa_0$ et $\mu_0$. L'état de contrainte dans chacun de ces domaines peut être représenté par deux couples de fonctions $\varphi_1(z)$, $\psi_1(z)$ et $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$. Diverses conditions sont possibles sur le contour $L_1$. Dans le cas d'adhérence, par exemple, les conditions sont de la forme

$$\varphi_0(t)+\overline{t\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=\varphi_1(t)+\overline{t\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)},$$

$$\frac{1}{\mu_0}[\varkappa_0\varphi_0(t)-\overline{t\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)}]=$$
$$=\frac{1}{\mu_1}[\varkappa_1\varphi_1(t)-\overline{t\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}]+\frac{f(t)}{\mu_1}, \qquad (15.16)$$

et la fonction $f(t)$, déterminant le saut toléré du déplacement, peut être nulle. Il est évident que la position du problème peut être étendue au cas général de plusieurs inclusions.

Abordons maintenant la question des problèmes plans mixtes (de contact). Nous supposerons que le contour $L$ délimitant le corps

est divisé en plusieurs parties $L_j$ de telle sorte que sur chacune des parties consécutives soient réalisées ou bien les conditions (15.14), ou bien les conditions (15.15). Physiquement, une condition aux limites de ce genre correspond au problème pour le cas où certaines parties du contour sont sollicitées par des contraintes extérieures données et d'autres soumises à l'apposition (avec adhérence) d'étampes rigides. Généralement, on se donne la condition (15.15) à quelques constantes près (déterminées au cours de la résolution), tandis que le vecteur résultant et le vecteur moment résultant des efforts sont supposés donnés. En l'absence d'adhérence (dans le cas où la contrainte tangentielle est nulle par exemple) les conditions correspondantes deviennent plus compliquées.

La position des problèmes mixtes (de contact) est possible aussi pour une division du contour $L_j$ en parties non connue à l'avance, mais définie au cours de la résolution. Afin de les définir (au cours de l'élaboration de la solution), on introduit certaines restrictions: par exemple, en l'absence de frottement il faut absolument que la pression de contact soit uniquement négative.

Ces raisonnements sont de rigueur également pour un état plan de contrainte. Plus encore, dans ce cas une non-homogénéité réelle peut apparaître, même lorsque toutes les constantes du milieu sont gardées invariables, à cause du changement d'épaisseur, et ceci conduit à la condition aux limites

$$\begin{aligned} \alpha\left[\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}\right] &= \varphi_1(t)+t\overline{\varphi_1'(t)}+\overline{\psi_1(t)}, \\ \varkappa_0\varphi_0-t\overline{\varphi_0'(t)}-\overline{\psi_0(t)} &= \varkappa_0\varphi_1(t)-t\overline{\varphi_1'(t)}-\overline{\psi_1(t)}, \end{aligned} \qquad (15.17)$$

où $\alpha$ est le rapport des épaisseurs $h_0/h_1$. Bien entendu, l'effet spatial de concentration des contraintes sur la courbe de contact n'est pas pris en compte dans cette position du problème.

Au § 14 les théorèmes d'univocité ont été démontrés pour les problèmes fondamentaux spatiaux de la théorie de l'élasticité. Appliqués au problème plan, ces théorèmes ont la formulation suivante.

Dans le cas du premier problème fondamental les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont déterminées de façon univoque aux constantes complexes $\gamma$ et $\gamma'$ près, liées par l'équation $\varkappa\gamma-\overline{\gamma}'=0$.

Dans le cas du deuxième problème fondamental les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont déterminées aux termes $Ciz+\gamma$ et $\gamma'$ près respectivement (où $C$ est une constante réelle). Les déplacements diffèrent dans ce cas d'une valeur qui représente le déplacement du corps en tant qu'un tout rigide. Bien entendu, si le domaine est infini et si partant d'une considération quelconque on a introduit la condition d'égalité à zéro des déplacements à l'infini, alors tous les termes s'annulent.

Remarquons que dans le cas du problème mixte les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont déterminées avec la même précision que dans le premier problème fondamental.

## § 16. Flexion de lames

Considérons un corps élastique ayant la forme d'un cylindre de faible épaisseur $h$. Choisissons comme auparavant le système de coordonnées cartésiennes $x$, $y$, $z$ de telle sorte que les axes $x$ et $y$ soient situés dans le plan médian.

Nous allons faire l'étude d'un cas spécial de déformation de ce corps. Supposons l'hypothèse des sections planes réalisée (cf. A. E. H. Love *[1]). Examinons un élément de section de lame,

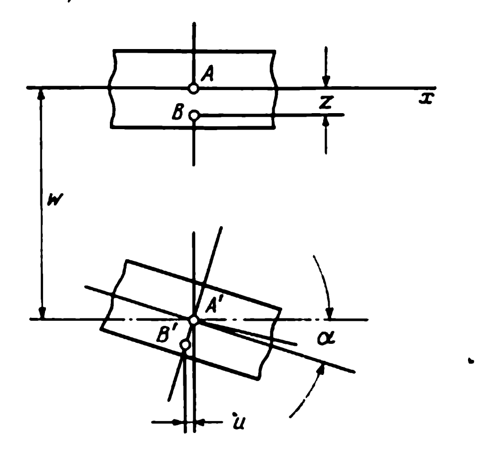



Fig. 5. Déplacement de la lame.

parallèle au plan $xz$ (fig. 5). Prenons les points $A$ et $B$ disposés sur une même normale au plan médian non déformé, le point $A$ étant situé sur le plan médian même, le point $B$ à la distance $z$ de celui-ci. Ecrivons les expressions des déplacements du point $B$ dans les directions des axes $x$ et $y$:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = -z\frac{\partial w}{\partial y}. \tag{16.1}$$

Les déplacements des points du plan médian dans les directions des axes $x$ et $y$ étant exclus, les expressions des déformations (14.1) deviennent

$$\varepsilon_x = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \varepsilon_y = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}. \tag{16.2}$$

Admettant $\sigma_z$, $\tau_{yz}$ et $\tau_{xz}$ petites, nous parvenons à la représentation des composantes des contraintes par les dérivées du déplacement $w$

uniquement :

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right),\\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\nu}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}
\tag{16.3}
$$

Partant de ces relations on peut déterminer les moments de flexion et de torsion par unité de longueur d'une section parallèle au plan

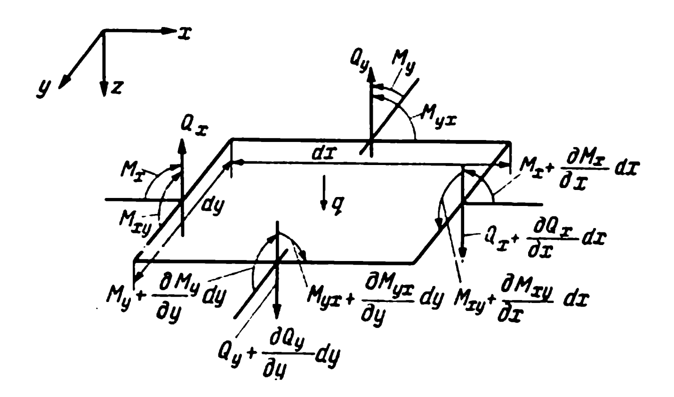



Fig. 6. Chargement d'un élément de la lame.

$xz$ ou $yz$:

$$
M_x=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_x z\,dz=-\frac{E}{1-\nu^2}\int_{-h/2}^{h/2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)z\,dz. \tag{16.4}
$$

Comme $w$ est la déflexion du plan médian (et par conséquent ne dépend pas de $z$), ramenons l'expression (16.4) à la forme

$$
M_x=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{16.5}
$$

où la constante $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ est appelée *rigidité cylindrique*. D'une façon analogue on obtient

$$
\begin{aligned}
M_y &= -\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_y z\,dz=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),\\
M_{xy} &= -\int_{-h/2}^{h/2}\tau_{xy} z\,dz=D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}.
\end{aligned}
\tag{16.6}
$$

Remarquons que les bords de l'élément (fig. 6) sont sollicités par les forces $Q_x$ et $Q_y$ déterminées à l'aide des contraintes $\tau_{zx}$ et $\tau_{zy}$:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zx}\, dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{zy}\, dz. \tag{16.7}$$

La condition d'égalité à zéro de toutes les forces dans la direction de la normale entraîne

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0, \tag{16.8}$$

où $q$ est la charge transversale. Il résulte par ailleurs de la condition d'égalité à zéro des moments par rapport aux axes $x$ et $y$ les relations

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0. \tag{16.9}$$

Des équations (16.9) découlent les représentations des forces tranchantes par le déplacement $w\,(x,\ y)$:

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \quad Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right). \tag{16.10}$$

Portant ces expressions dans l'équation (16.8) nous obtenons pour le déplacement $w$ une équation différentielle qui est l'équation fondamentale de la théorie des plaques minces en flexion, dite *équation de Sophie Germain*:

$$\Delta^2 w = q/D. \tag{16.11}$$

Par conséquent, en l'absence de charge transversale ($q = 0$) la résolution du problème de la flexion se ramène à une équation biharmonique. Il est évident que, dans le cas général également, une solution particulière de l'équation non homogène étant connue, nous sommes conduits à la résolution du problème homogène. Notons $w^1\,(x,\ y)$ la solution particulière correspondante et $w_0\,(x,\ y)$ la solution générale du problème biharmonique. Dans nombre de cas la recherche de solutions particulières est élémentaire. Généralement parlant, la construction de la solution particulière dans le cas général (cf. N. Muskhelishvili [3]) aussi ne présente pas de difficultés de principe.

En vertu de la formule de Goursat (15.8), représentons la fonction $w_0\,(x,\ y)$ au moyen de deux fonctions analytiques $\varphi\,(z)$ et $\chi\,(z)$ dans le domaine $D$ occupé par le plan médian de la plaque:

$$w_0\,(x,\ y) = 2\mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi\,(z) + \chi\,(z)]. \tag{16.12}$$

Utilisant les formules précédentes nous obtenons la représentation des moments de flexion $M_x$, $M_y$, du moment de torsion $M_{xy}$,

des forces tranchantes $Q_x$ et $Q_y$ et des déplacements $u$ et $v$ au moyen de ces fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z) = \chi'(z)$. Il est utile pour la suite de représenter les formules des facteurs de force sous la forme:

$$\begin{aligned} M_y - M_x + 2iM_{xy} &= 4D(1-\nu)[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] + \\ &\qquad + (M_y^1 - M_x^1 - 2iM_{xy}^1), \\ M_x + M_y &= -4D(1+\nu)[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}] + (M_x^1 + M_y^1), \qquad (16.13) \\ Q_x - iQ_y &= -8D\varphi''(z) + (Q_x^1 - iQ_y^1). \end{aligned}$$

On représentera par ailleurs les composantes du déplacement sous la forme de la combinaison suivante ($Z$ désigne la coordonnée le long de l'axe normal au plan médian):

$$u + iv = -2[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}]Z - \left(\frac{\partial w^1}{\partial x} + i\frac{\partial w^1}{\partial y}\right)Z. \qquad (16.14)$$

On a dans les formules (16.13) et (16.14) des termes affectés de l'indice « 1 » montrant qu'ils correspondent à la solution particulière $w^1(x, y)$.

Passons à la considération des conditions aux limites. Nous supposerons comme auparavant la frontière du domaine différentiable et nous la désignerons par $L$.

1. Admettons le bord de la plaque libre de liaisons géométriques et sollicité par le moment de flexion $m(s)$ et la force tranchante $p(s)$ (la position des points du contour est décomptée le long de celui-ci à partir d'un point initial). Soient respectivement $M_n$, $M_{n\tau}$ et $Q_n$ les moments de flexion et de torsion et la force tranchante dans la section ayant $n$ pour normale. On a dans ce cas les égalités

$$M_n = m(s), \qquad N_n = Q_n + \frac{\partial M_{n\tau}}{\partial s} = p(s). \qquad (16.15)$$

Les grandeurs $M_n$, $M_{n\tau}$ et $Q_n$ s'expriment par les grandeurs $M_x$, $M_y$, $M_{xy}$, $Q_x$ et $Q_y$ à l'aide de formules analogues à celles qu'on a pour la transformation des composantes des contraintes lors de la rotation des axes de coordonnées:

$$\begin{aligned} M_n &= M_x\cos^2(n, x) + M_y\cos^2(n, y) + 2M_{xy}\cos(n, x)\cos(n, y), \\ M_{n\tau} &= (M_y - M_x)\cos(n, x)\cos(n, y) + M_{xy}[\cos^2(n, x) - \\ &\qquad - \cos^2(n, y)], \qquad (16.16) \\ Q_n &= \pm[Q_x\cos(n, x) + Q_y\cos(n, y)]. \end{aligned}$$

Le signe « + » correspond au domaine fini $D$, le signe « — » à un domaine infini, c'est-à-dire à une plaque comportant un trou. Intégrant la deuxième des conditions (16.15) le long de l'arc, nous obtenons ($c$ est une constante):

$$P + M_{n\tau} = f(s) + c,$$
$$P = \int_0^s Q_n\,ds, \qquad f(s) = \int_0^s p(s)\,ds. \qquad (16.17)$$

A l'aide de (16.13) passons aux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ et portons (16.16) dans la première des conditions (16.15) et dans (16.17). On obtient alors la représentation cherchée du problème aux limites ($c_0$ est une constante réelle):

$$-\varkappa\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=$$

$$=\frac{1}{2D(1-\nu)}\left[\int_0^s (m^1+if^1)(dz)-\int_0^s (m+if)(dz)\right]-ic_0z, \quad (16.18)$$

où $m^1$ et $f^1$ correspondent à la solution particulière.

2. Admettons données sur le bord de la plaque la grandeur de la déflexion $w_*(s)$ et la valeur de sa dérivée normale. Formons la fonction complexe ($\alpha$ est l'angle entre la normale extérieure et l'axe $x$):

$$\frac{\partial w_*}{\partial n}+i\frac{\partial w_*}{\partial s}=e^{i\alpha}\left(\frac{\partial w_*}{\partial x}-i\frac{\partial w_*}{\partial y}\right).$$

Utilisant (16.14) on peut montrer qu'a lieu l'égalité

$$\overline{\varphi(z)}+\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_*}{\partial x}-i\frac{\partial w_*}{\partial y}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w^1}{\partial x}-i\frac{\partial w^1}{\partial y}\right). \quad (16.19)$$

Le passage aux valeurs conjuguées dans les équations (16.18) et (16.19) conduit à des équations analogues aux équations (15.10) et (15.11) du problème plan de la théorie de l'élasticité.

3. Admettons données sur le bord de la plaque les valeurs des déflexions et du moment de flexion (plaque appuiée). On a dans ce cas les conditions aux limites

$$\operatorname{Re}\left\{\varkappa_1^*\varphi'(t)-\left(\frac{dt}{ds}\right)^2[t\varphi''(t)+\varphi'(t)]\right\}=h(t), \quad (16.20)$$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{dt}{ds}[\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)+\psi(t)]\right\}=g(t), \quad (16.21)$$

où $\varkappa^*=\frac{2(1+\nu)}{1-\nu}$, $h(t)$ et $g(t)$ sont des fonctions données.

Passons au cas où le domaine du plan médian est multiconnexe, i.e. délimité par des contours au nombre de $m+1$. Dans ce cas de même il y a analogie complète avec le problème plan. Les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ s'avèrent multivoques et cette multivocité est éliminée par l'introduction des nouvelles fonctions $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$:

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{iP_{zk}^*}{8D}z+\frac{M_{xk}^*+iM_{yk}^*}{8D}\right]\ln(z-z_k)+\varphi^*(z),$$

$$\psi(z)=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{8D}(M_{xk}^*-iM_{yk}^*)\ln(z-z_k)+\psi^*(z). \quad (16.22)$$

Ici $P^*_{zk}$ est le vecteur résultant des efforts appliqués au contour $L_k$, $M^*_{xk}$ et $M^*_{yk}$ les composantes du vecteur moment résultant des efforts.

La position du problème de la théorie des plaques homogènes par morceaux en flexion ne présente pas de difficultés. A la différence du problème de déformation plane, une telle non-homogénéité (comme pour l'état plan de contrainte) peut être due non seulement à une modification des propriétés mécaniques, mais aussi à une variation par saut de l'épaisseur. Les variantes appropriées des conditions de contact sont obtenues à l'appui des relations (16.18) et (16.19) d'une manière analogue à (15.16) et (15.17). L'effet de concentration des contraintes dû au changement brusque d'épaisseur n'est naturellement pas pris en compte dans le cas.

## § 17. Sur les solutions particulières des équations de la théorie de l'élasticité

On sait qu'en général, l'établissement des équations de la théorie linéaire de l'élasticité nécessite certaines hypothèses (par exemple, les déformations sont supposées suffisamment petites pour que leur carré soit négligeable en comparaison avec l'unité, etc.). Toutefois, il s'avère parfois utile de chercher une solution mathématique formelle d'un problème aux limites, solution qui peut se trouver en contradiction avec telles ou telles positions initiales. A titre d'exemple indiquons le cas de l'application d'une force concentrée à l'intérieur du corps ou sur sa frontière quand les déformations correspondantes sont illimitées. Le fait est qu'assez souvent la solution s'avère acceptable en dehors d'un certain domaine (relativement facile à définir) attenant au point sollicité par la force et, en outre, la recherche de la solution elle-même devient souvent plus facile que celle de la solution correspondant à la sollicitation réelle, dont l'idéalisation est une force concentrée.

Lorsqu'on s'apprête à résoudre un problème de ce genre il est souhaitable, en général, d'éliminer les singularités par telles ou telles méthodes numériques (par exemple, à l'aide d'équations intégrales), ce qui n'exige pas beaucoup d'efforts puisqu'il est nécessaire de superposer des solutions élémentaires connues. D'autre part, il est parfois possible d'établir l'existence de solutions particulières (qui sont contradictoires aux principes fondamentaux de la théorie) directement de la configuration du domaine et de la forme des conditions aux limites, toutefois les facteurs qui les caractérisent sont déterminés au cours de la bonne résolution du problème. Il s'agit des problèmes où, dans le cas spatial, la surface frontière possède des points irréguliers (arêtes, points coniques, sommets d'angles polyèdres), et dans le cas plan, le contour frontière possède des points anguleux.

Plus loin au § 25 (pour le problème plan) et au § 37 (pour le problème spatial) on établit que les solutions qui apparaissent alors recèlent des solutions particulières (dites souvent singulières) ayant la même structure que les solutions non triviales d'un coin et d'un cône avec les mêmes angles d'ouverture et des conditions aux limites homogènes. Aussi est-il important de disposer des solutions de ces domaines (canoniques).

Considérons tout d'abord le problème plan d'un coin d'angle d'ouverture au sommet égal à $\alpha$. Nous partirons des équations de Lamé (14.4) pour le cas de déformation plane tout en utilisant un système polaire de coordonnées $(r, \theta)$ centré au sommet du coin :

$$\begin{gathered}(\lambda+2\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)-\\ -\mu\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{u_\theta}{r}\right)=0,\\ (\lambda+2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+\\ +\mu\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\right)=0.\end{gathered} \tag{17.1}$$

Rapportons les expressions des composantes du tenseur des contraintes :

$$\begin{gathered}\sigma_\theta=\lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right)+2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}+\frac{u_r}{r}\right),\\ \tau_{r\theta}=\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}\right).\end{gathered} \tag{17.2}$$

Nous recherchérons la solution sous la forme des produits

$$u_r(r,\theta)=r^\lambda f(\theta);\quad U_\theta(r,\theta)=r^\lambda g(\theta). \tag{17.3}$$

Portant (17.3) dans (17.1) nous parvenons à un système d'équations différentielles ordinaires, dont la solution est trouvée sous forme élémentaire. Ecrivons les expressions correspondantes des déplacements et des contraintes :

$$\begin{gathered}r^{-\lambda}u_r=A\cos[(1+\lambda)\theta]+B\sin[(1+\lambda)\theta]+\\ +C[(1-\lambda)\theta]+D\sin[(1-\lambda)\theta],\\ r^{-\lambda}u_\theta=B\cos[(1+\lambda)\theta]-A\sin[(1+\lambda)\theta]+\\ +\nu_1 D\cos[(1-\lambda)\theta]-\nu_1 C\sin[(1-\lambda)\theta];\end{gathered} \tag{17.4}$$

$$\mu^{-1}r^{1-\lambda}\sigma_\theta = -2\lambda A\cos[(1+\lambda)\theta] - \\ -2\lambda B\sin[(1-\nu_1)D\sin[(1-\lambda)\theta],$$

$$\mu_1 r^{1-\lambda}\tau_{r\theta} = -2\lambda A\sin[(1+\lambda)\theta] + 2\lambda B\cos[(1+\lambda)\theta] - \\ -(1-\lambda)(1-\nu_1)C\sin[(1-\lambda)\theta] + \\ +(1-\lambda)(1-\nu_1)D\cos[(1-\lambda)\theta], \tag{17.5}$$

$$\nu_1 = \frac{3+\lambda-4\nu}{3-\lambda-4\nu}.$$

Considérons le deuxième problème fondamental. Supposant que $\sigma_\theta$ et $\tau_{r\theta}$ s'annulent lorsque $\theta = \pm\alpha$, nous sommes conduits au système d'équations

$$-2\lambda A\cos[(1+\lambda)\alpha] \pm 2\lambda B\cos[(1+\lambda)\alpha] - \\ -(1+\lambda)(1-\nu_1)C\cos[(1-\lambda)\alpha] - (1+\lambda)(1-\nu_1)D\times \\ \times\sin[(1-\lambda)\alpha] = 0,$$

$$\mp 2\lambda A\sin[(1+\lambda)\alpha] + 2\lambda B\cos[(1+\lambda)\alpha] \mp \\ \mp(1-\lambda)(1-\nu_1)C\sin[(1-\lambda)\alpha] + (1-\lambda)(1-\nu_1)D\times \\ \times\cos[(1-\lambda)\alpha] = 0. \tag{17.6}$$

Le système 17.6 se décompose en deux systèmes:

$$-2\lambda A\cos[(1+\lambda)\alpha] - (1+\lambda)(1-\nu_1)C\cos[(1-\lambda)\alpha] = 0, \\ 2\lambda A\sin[(1+\lambda)\alpha] + (1-\lambda)(1-\nu_1)C\sin[(1-\lambda)\alpha] = 0; \tag{17.7}$$

$$2\lambda B\sin[(1+\lambda)\alpha] + (1+\lambda)(1-\nu_1)D\sin[(1-\lambda)\alpha] = 0, \\ 2\lambda B\cos[(1+\lambda)\alpha] + (1-\lambda)(1-\nu_1)D\cos[(1-\lambda)\alpha] = 0. \tag{17.8}$$

La condition d'existence d'une solution non triviale pour le système (17.7), i.e. la condition d'égalité à zéro du déterminant se ramène à l'équation

$$\sin 2\alpha + \frac{1}{\lambda}\sin 2\alpha\lambda = 0. \tag{17.9}$$

Aussi faut-il pour $\lambda$, qui est racine de cette équation, garder dans la solution les constantes $A$ et $C$, liées entre elles par la relation

$$A = \frac{(1+\lambda)(\nu_1-1)\cos[(1-\lambda)\alpha]}{2\lambda\cos[(1+\lambda)\alpha]}C = k_1 C \tag{17.10}$$

et supposer les constantes $B$ et $D$ nulles. La condition d'égalité à zéro du déterminant du système (17.8) conduit, elle, à l'équation

$$\sin 2\alpha - \frac{1}{\lambda}\sin 2\alpha\lambda = 0. \tag{17.11}$$

Il faut cette fois pour $\lambda$, qui est racine de cette équation, garder dans la solution les constantes $B$ et $D$, liées par la relation

$$B = \frac{(1+\lambda)(\nu_1-1)\sin[(1-\lambda)\alpha]}{2\lambda\sin[(1+\lambda)\alpha]}D = k_2 D \tag{17.12}$$

et supposer les constantes $A$ et $C$ nulles. On peut écrire les équations (17.9) et (17.11) sous une forme qui englobe les deux:

$$\sin 2\alpha\lambda = \pm\lambda \sin 2\alpha. \qquad (17.13)$$

L'équation (17.13) peut admettre des racines conjuguées complexes $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Utilisant alors les représentations (17.4) et (17.5) et leurs conjointes, nous obtenons que dans la solution figurent les fonctions oscillatrices

$$r^{\lambda_1}\begin{cases} \cos(\lambda_2 \ln r), \\ \sin(\lambda_2 \ln r). \end{cases}$$

Notons que S. N. Karp et F. C. J. Karal proposent dans l'article *[1] des recommandations sur la recherche approchée des racines réelles et complexes.

Sont intéressantes celles des racines de l'équation (17.13) qui vérifient la restriction $0 < \operatorname{Re}\lambda < 1$. En effet, lorsque $\operatorname{Re}\lambda < 0$, l'énergie de déformation s'avère infinie, et lorsque $\operatorname{Re}\lambda > 1$, les contraintes se trouvent limitées (les termes restants, non analytiques, sont sans intérêt). Dans le cas où pour une valeur donnée de $\alpha$ les solutions font défaut dans les limites indiquées, on peut affirmer que les contraintes sont limitées. Conformément au type de conditions aux limites le cas considéré sera dit cas II-II.

On considère d'une manière analogue le problème où sur les frontières sont supposés nuls les déplacements (cas I-I) ou les contraintes tangentielles $\tau_{r\theta}$ et les déplacements normaux $U_\theta$ (cas III-III), de même que les cas où sur l'un des côtés est donnée une condition d'un type et sur l'autre une condition d'un autre type (cas mixtes I-II, I-III, II-III).

Rapportons les équations transcendantes correspondantes:

$$\begin{aligned} &\sin 2\lambda\alpha = \pm\frac{\lambda}{\varkappa}\sin 2\alpha \quad \text{(I-I)}, \\ &\sin 2\lambda\alpha = \pm\sin 2\alpha \quad \text{(III-III)}, \\ &\sin^2 2\lambda\alpha = \frac{(1+\varkappa)^2}{4\varkappa} - \frac{\lambda^2\sin^2 2\alpha}{\varkappa} \quad \text{(I-II)}, \\ &\sin 4\lambda\alpha = -\lambda\sin 4\alpha \quad \text{(I-III)}, \\ &\sin 4\lambda\alpha = \frac{\lambda}{\varkappa}\sin 4\alpha \quad \text{(II-III)}, \end{aligned} \qquad (17.14)$$

où $\varkappa = (3-\nu)/(1+\nu)$.

Les solutions de ces équations pour différentes valeurs de $\alpha$ sont représentées sur la figure 7 (A. Kalandia [1]).

Passons à la considération du problème correspondant à un cône circulaire (Z. P. Bazant *[1]).

Il est naturellement plus commode de résoudre ce problème dans un système de coordonnées sphérique. Nous partirons de la représentation des déplacements sous la forme

$$u_r = r^{\lambda} U_r(\theta); \quad u_\theta = r^{\lambda} U_\theta(\theta). \tag{17.15}$$

La dernière condition n'introduit pas de restrictions supplémentaires, car la solution sera cherchée pour des déplacements ou des con-

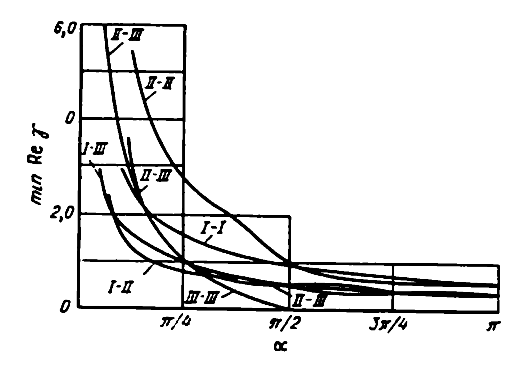



Fig. 7. Min Re $\lambda$ en fonction de l'angle $\alpha$ pour différentes conditions aux limites.

traintes nuls, donc la condition de symétrie axiale est automatiquement réalisée. Les équations de Lamé se transforment alors en les équations :

$$\begin{gathered}\frac{d^2U_r}{d\theta^2} + \operatorname{cotg}\theta \frac{dU_r}{d\theta} + [\nu_1(\lambda-1)-\lambda-1]\frac{dU_\theta}{d\theta} + \\ + \nu_1(\lambda-1)(\lambda+2)U_r + [\nu_1(\lambda-1)-\lambda-1]\operatorname{cotg}\theta U_\theta = 0, \\ \nu_1\frac{d^2U_\theta}{d\theta^2} + [\nu_1(\lambda+2)-\lambda]\frac{dU_r}{d\theta} + \nu_1\operatorname{cotg}\theta\frac{dU_\theta}{d\theta} + \\ + \left[\lambda(\lambda+1)-\frac{\nu_1}{\sin^2\theta}\right]U_\theta = 0 \quad \left(\nu_1 = \frac{1-\nu}{0,5-\nu}\right).\end{gathered} \tag{17.16}$$

Dans le cas du premier problème fondamental il est nécessaire d'exiger que les déplacements sur le cône $\theta = \alpha$ soient nuls et, en outre, que les égalités

$$\frac{dU_r}{d\theta} = U_\theta = 0 \tag{17.17}$$

aient lieu afin d'assurer la régularité de la solution sur l'axe de rotation.

Dans le cas du deuxième problème fondamental les composantes $\sigma_\theta$ et $\tau_{r\theta}$ doivent s'annuler lorsque $\theta = \alpha$, ce qui pour les fonctions

$U_r$ et $U_\theta$ conduit à la vérification des conditions

$$\frac{dU_\theta}{d\theta}+(1+\nu_2+\lambda\nu_2)\,U_r+\nu_2\operatorname{cotg}\alpha U_\theta=0,$$

$$\frac{dU_r}{d\theta}-(1-\lambda)\,U_\theta=0\left(\nu_2=\frac{\nu}{1-\nu}\right). \qquad (17.18)$$

Les égalités (17.17), elles, restent en vigueur.

Les valeurs de Re $\lambda$ (dans les mêmes limites) pour les premier et deuxième problèmes (cf. Z. P. Bazant *[1]) sont représentées sur la

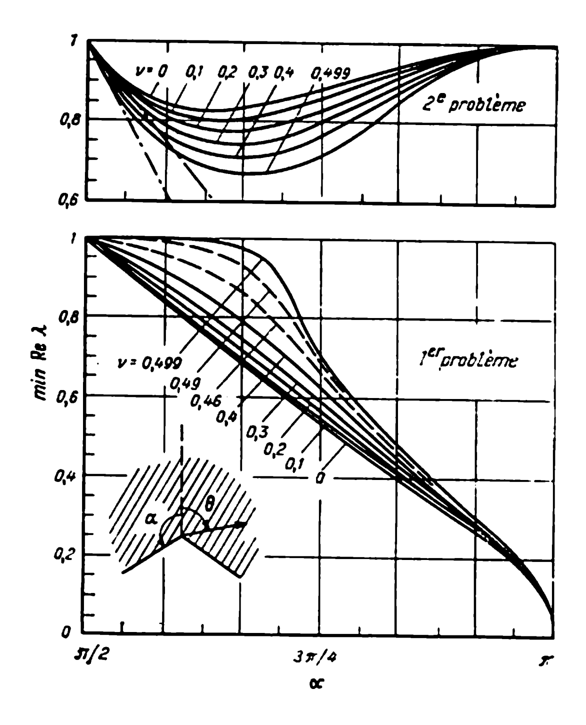



Fig. 8. Min Re $\lambda$ en fonction de l'angle $\alpha$ pour différents $\nu$ pour les premier et deuxième problèmes.

figure 8. Dans ce même travail est étudié également le cas où la surface réglée du cône présente des arêtes.

Considérons à présent un coin tridimensionnel, délimité par deux demi-plans formant entre eux un angle $\alpha$. Supposons que ce coin subisse un état de contrainte et de déformation de type spécifique: cisaillement longitudinal (dit également déformation antiplane) tel que seule une composante du déplacement $\omega$ parallèle à l'arête (l'axe $z$) est différente de zéro et de plus constante le long de

l'axe $z$. Il découlera alors de la loi de Hooke et des équations d'équilibre que seules deux composantes des contraintes, $\tau_{z\theta}$ et $\tau_{z\rho}$ ($z$, $\rho$, $\theta$ coordonnées cylindriques), sont différentes de zéro ; le déplacement $\omega$ ($\rho$, $\theta$) vérifiera, lui, l'équation de Laplace. Déterminons la solution propre du problème de la théorie de l'élasticité relatif à un tel

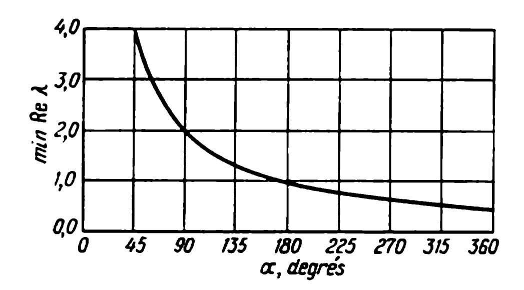



Fig. 9. Min Re $\lambda$ en fonction de l'angle, $\alpha$, déformation antiplane.

coin dans le cas des contraintes $\tau_{z\theta}$ nulles sur les faces. La fonction harmonique correspondante est trouvée en tant que partie réelle de la fonction analytique $z^\lambda$ et on obtient pour $\lambda$ l'équation suivante:

$$\sin \lambda\alpha = 0. \tag{17.19}$$

La solution qui nous intéresse (c'est-à-dire la solution à la plus petite partie réelle) vaut $\pi/\alpha$. La simplicité de la réponse nous incite à conclure immédiatement que les contraintes peuvent être illimitées uniquement dans le cas, où $\alpha > \pi$ (cas des angles concaves). La valeur du min Re $\lambda$ en fonction de l'angle $\alpha$ est représentée sur la figure 9 empruntée à l'article *[1] de G. C. Sih.

Il convient de noter que les particularités du comportement des solutions au voisinage des points anguleux, définies à l'aide de la méthode des fonctions propres, s'avèrent identiques aux particularités qu'on obtient au cours de la résolution directe (dans les cas où cela est possible) du problème aux limites correspondant. G. Cherepanov [1] donne la solution pour un plan homogène par morceaux, dont les lignes de coupure coïncident avec le contour de jonction des milieux.

On applique également l'approche exposée pour l'étude de l'état de contrainte et de déformation d'un milieu homogène par morceaux quand la surface ou la ligne de séparation des milieux émerge sur la surface extérieure ou quand la surface de séparation des milieux elle-même ne contient pas de points irréguliers (A. Avetissyan, K. Tchobanian [1], L. M. Keer, K. S. Parihar *[1]). L'analyse se ramène à la résolution de problèmes pour un corps constitué de deux ou plusieurs coins en cas de conditions aux limites homogènes sur

les frontières extérieures. Les calculs effectués pour des cas particuliers sont rapportés dans les travaux de M. L. Williams *[2] et A. R. Zak, M. L. Williams *[1]. On considère dans le premier travail deux coins d'angle d'ouverture $\pi$ (le plan présente une coupure semi-infinie) et dans le second, trois coins : deux d'angle $\pi/2$ et le troisième d'angle $\pi$ (le plan homogène par morceaux présente une coupure semi-infinie émergeant sur la frontière de séparation des milieux).

Il convient d'indiquer encore que les singularités de la solution dépendent également de la nature des conditions aux limites. La présence de forces concentrées et de moments, de discontinuités dans les conditions aux limites conduisent à des singularités de la solution même en l'absence de points anguleux ($\alpha = \pi$). Toutefois on peut, à l'aide d'une solution particulière correspondante (le plus souvent, élémentaire), éliminer préalablement ces singularités.

CHAPITRE IV

# ÉQUATIONS INTÉGRALES DES PROBLÈMES BIDIMENSIONNELS DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

## § 18. Equations intégrales de Muskhelishvili

Considérons ensemble les premier et deuxième problèmes de la théorie de l'élasticité pour un domaine fini simplement connexe $D^+$, délimité par un contour régulier $L$. Récrivons les conditions aux limites sous une forme généralisée:

$$k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t) = \overline{f(t)}. \tag{18.1}$$

Ici $k = -\varkappa$ dans le cas du premier problème, $k = 1$ dans le cas du deuxième, la fonction $f(t)$, elle, a été déterminée plus haut (§ 15).

Récrivons la condition (18.1) sous la forme

$$\psi(t) = \overline{f(t)} - k\overline{\varphi(t)} - \bar{t}\varphi'(t). \tag{18.1'}$$

Le second membre de (18.1′) représente donc la valeur limite d'une fonction, analytique dans le domaine $D^+$. En vertu de (2.9′) cette condition peut être représentée sous la forme d'une égalité vraie pour tous les points $z$ situés en dehors du domaine $D^+$:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{k\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{f(t)}\,dt}{t-z} = A(z). \tag{18.2}$$

Passons de l'équation fonctionnelle (18.2) à une équation intégrale. Pour cela, réalisons le passage à la limite vers les points du contour $L$ en restant tout le temps à l'extrérieur du domaine $D^+$. Supposons, par ailleurs, que les fonctions $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$ et $f(t)$ vérifient la condition H-L, ce qui rend possible l'utilisation des formules de Sokhotski-Plemelj.

Pour obtenir l'équation sous une forme compacte utilisons les identités

$$-\frac{1}{2}\overline{\varphi(t_0)} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{dt}}{\bar{t}-t_0} = 0,$$

$$-\frac{1}{2}\varphi'(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi'(t)\,dt}{t-t_0} = 0.$$

Passons à la limite dans (18.2) et ajoutons à cette relation les rnières identités, multipliées respectivement par $-\bar{t}_0$ et $k$. Effecant l'intégration par parties, nous parvenons à l'*équation intégrale N. Muskhelishvili* [3]:

$$k\overline{\varphi(t_0)} - \frac{k}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\, d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\, d\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} = A\,(t_0). \quad (18.3)$$

L'équation (18.3) appartient à la classe des équations intégrales e Fredholm. Faisons son étude. Commençons par la considération u deuxième problème fondamental ($k = 1$). Montrons d'abord que oute solution de ce problème doit être valeur limite d'une fonction nalytique dans le domaine $D^+$. Soit $\varphi\,(t)$ une solution quelconque e l'équation (18.3). Formons les intégrales de type Cauchy (le point ' est pris dans le domaine $D^-$):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t-z'}\,dt = i\Phi(z'),\\ &\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)-\overline{f(t)}}{t-z'}\,dt = -i\Psi(z'). \end{aligned} \quad (18.4)$$

L'équation (18.3) peut alors être interprétée comme une relation ntre les fonctions $\Phi\,(t)$ et $\Psi\,(t)$, qui sont les valeurs limites de onctions analytiques dans $D^-$:

$$\overline{\Phi(t)} + \bar{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t) = 0. \quad (18.5)$$

Il découle de la relation (18.5) que

$$\Phi\,(z') = i\alpha z' + \beta, \quad \Psi\,(z') = -\bar{\beta},$$

puisque ces fonctions représentent la solution du deuxième problème extérieur pour des valeurs nulles de contraintes sur le contour ($\alpha$ est une constante réelle, $\beta$ une constante complexe). Comme ces fonctions sont des intégrales de type Cauchy, elles sont donc nulles à l'infini. C'est pourquoi il résultera de la première représentation (18.4) que $\varphi\,(t)$ est valeur limite d'une fonction, analytique dans le domaine $D^+$.

Puisque la fonction $\varphi_0\,(z) = i\alpha z + \beta$ ($\alpha$ et $\beta$ sont, comme auparavant, des constantes réelle et complexe) correspond à un état nul de contrainte, alors il est évident qu'elle représentera une solution non triviale (et de plus unique) de l'équation (18.3) si son second membre est nul.

Remarquons que le problème de la théorie de l'élasticité luimême pour un domaine limité n'a de solution que si le vecteur

moment résultant des forces extérieures est égal à zéro:

$$\mathrm{Re} \int_L \overline{f(t)}\, dt = 0. \tag{18.6}$$

La condition d'égalité à zéro du vecteur résultant des forces extérieures découle automatiquement de l'univocité de la condition à la limite.

En nous appuyant sur le travail de D. Scherman [2], démontrons que la condition (18.6) entraîne la résolubilité de l'équation (18.3) (pour $k = 1$). Nous supposerons que l'origine des coordonnées est située dans le domaine $D^+$. Ajoutons au premier membre de l'équation initiale l'opérateur

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t_0} \int_L \left( \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t} \right) \tag{18.7}$$

et analysons l'équation obtenue

$$-k\overline{\varphi(t_0)} - \frac{k}{2\pi i} \int_L \overline{\varphi(t)}\, d \ln \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(t)\, d\, \frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{t_0} \int_L \left[ \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t} \right] = A(t_0). \tag{18.3'}$$

Démontrons que chaque solution de la dernière équation est valeur limite d'une fonction, analytique dans le domaine $D^+$. A la différence de (18.4), définissons la fonction $\Psi(z')$ correspondante au moyen de l'expression suivante:

$$\Psi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) - \overline{f(t)}}{t - z'}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{z'} \int_L \left[ \frac{\varphi(t)}{t^2}\, dt + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\, d\bar{t} \right]. \tag{18.4'}$$

L'équation (18.3') se transforme alors en la même relation à la limite (18.5). Comme précédemment, nous obtenons l'égalité à zéro des fonctions $\Phi(z')$ et $\Psi(z')$ et, par conséquent, la possibilité de prolonger la solution dans le domaine $D^+$.

Montrons maintenant que toute solution de l'équation (18.3') annule les termes complémentaires (18.7) si le second membre vérifie la condition (18.6). Comme la fonction $\Psi(z') \equiv 0$, les coefficients de son développement en série de Laurent seront nuls. Le premier coefficient du développement est égal à

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)}{t}\, dt = 0, \tag{18.8}$$

et le coefficient de $1/z'$ est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(t)}+\bar{t}\varphi'(t)]\,dt - \\ -\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{f(t)}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt+\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\,d\bar{t}\right]=0. \quad (18.9)$$

Il découle de (18.8) que la première intégrale figurant dans (18.7) s'annule toujours. Transformons (18.9) en

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L [\overline{\varphi(t)}\,dt-\varphi(t)\,d\bar{t}]-\frac{1}{2\pi i}\int_L \bar{f}(t)\,dt+ \\ +\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\varphi(t)}{t^2}\,dt+\frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar{t}^2}\,d\bar{t}\right]=0. \quad (18.10)$$

Le premier terme, ainsi que le second (en vertu de (18.6)) est réel, alors que le troisième est complexe. Par conséquent, le troisième terme de (18.7) est égal à zéro.

Démontrons que l'équation (18.3′) est résoluble quel que soit son second membre. Il convient pour cela de montrer que l'équation homogène ne possède pas de solutions non triviales. Admettons qu'une telle solution existe. Désignons-la par $\varphi_0(t)$. Le second membre de l'équation étant nul, la condition (18.6) est vérifiée automatiquement et c'est pourquoi la somme (18.7) s'annule elle aussi lorsqu'on y porte la fonction $\varphi_0(t)$. Donc, la fonction $\varphi_0(t)$ doit être solution de l'équation homogène (18.3) également, et par conséquent, vaut $(\alpha t+\beta)$. Substituant cette fonction dans (18.7) nous obtenons de la condition de l'égalité de chacun des termes à zéro que les constantes $\alpha$ et $\beta$ s'annulent. Ainsi, la résolubilité de l'équation (18.3′) est démontrée pour un second membre arbitraire, notamment lorsque la condition (18.6) est satisfaite. Dans ce dernier cas, comme on a démontré plus haut, la solution de l'équation (18.3′) est solution de l'équation (18.3) aussi.

Les équations intégrales de Muskhelishvili peuvent être élaborées pour le cas d'un domaine multiconnexe et d'un problème extérieur. D. Sherman [2] a analysé ces équations et démontré leur résolubilité. Toutefois leur résolution pratique est dans ces cas difficile à obtenir vu la nécessité de résoudre préalablement des problèmes auxiliaires pour certains types particuliers de chargement *).

---

*) En appliquant les résultats tirés de l'article de D. Sherman (Problème plan statique de la théorie de l'élasticité pour un milieu anisotrope. Travaux de l'Institut Séismologique de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S., nº 86, 1938) à un milieu isotrope on peut obtenir des équations intégrales toujours résolubles, différant des équations de Muskhelishvili par des opérateurs complémentaires de forme élémentaire.

D. Sherman a établi que les nombres caractéristiques de l'équation (18.3′) sont en valeur absolue supérieurs à l'unité, assurant par cela même la convergence de la méthode des approximations successives. On conçoit que cette conclusion est vraie pour l'équation intégrale de Muskhelishvili aussi (à condition, bien entendu, que le moment vecteur résultant des forces extérieures soit nul).

La résolution numérique de l'équation de Muskhelishvili par la méthode d'intégration mécanique est compliquée à cause de la présence d'une fonction propre. En effet, le déterminant du système correspondant d'équations linéaires s'avère nul (dans les limites de la precision), ce qui conduit à l'obtention de valeurs non stables des grandeurs recherchées. N. Muskhelishvili [1], ainsi que A. Gorguidze et A. Rukhadze [1] ont proposé pour éliminer ce défaut de fixer la densité en certains points, excluant par-là même l'étude des équations correspondantes. P. Perline et Yu. Chaliukhine [1] ont proposé un autre procédé. Ils considèrent l'équation (18.3′). L'erreur des formules d'intégration utilisées et celle de la représentation approchée (constante par morceaux ou autre) de la densité font que les termes introduits complémentairement seront différents de zéro ; l'erreur qu'ils engendrent s'avère petite (de l'ordre de l'erreur des formules d'intégration), tandis que la structure du système d'équations algébriques s'améliore sans conteste puisque l'équation de départ n'admet pas de fonctions propres.

Notons que des complications de même nature (à cause de l'erreur de réalisation numérique) (cf. § 12) apparaissent également lors de la résolution de l'équation de Muskhelishvili par la méthode des approximations successives. P. Perline et Yu. Chaliukhine [1] proposent également d'utiliser l'équation (18.3′) pour élaborer une solution convergente.

Attirons l'attention sur le fait que pour les problèmes à deux axes de symétrie le processus s'avère stable dans les deux approches si, bien entendu, la discrétisation du contour, nécessaire pour la réalisation numérique, possède elle aussi une symétrie appropriée.

L'étude de l'équation intégrale correspondant au premier problème fondamental se fait d'une manière analogue. Il faut dans ce cas introduire une fonctionnelle complémentaire

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)}{t}\,dt.$$

## § 19. Equations intégrales de Sherman-Lauricella

Passons maintenant à l'élaboration d'autres équations intégrales des problèmes plans fondamentaux de la théorie de l'élasticité dites *équations de Sherman-Lauricella* (cf. D. Sherman [6, 7]).

Supposons que le domaine $D$ est délimité par un ou plusieurs contours $L_1, L_2, \ldots, L_m, L_0$ de telle sorte que les premiers $m$ contours sont disposés l'un en dehors de l'autre, tandis que le dernier englobe tous les autres (le contour $L_0$ peut faire défaut). Nous désignerons par $D_k^+$ ($k = 1, 2, \ldots, m$) les domaines finis délimités par les contours $L_k$, et par $D_0^-$ le domaine infini, l'extérieur du contour $L_0$.

Considérons d'abord le deuxième problème fondamental. Nous supposerons que les vecteurs résultants $X_k, Y_k$ des efforts extérieurs appliqués aux contours $L_k$ sont nuls (dans le cas contraire il importe de réaliser une transformation évidente des conditions aux limites). Dans ce cas les fonctions cherchées $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont univoques.

Ecrivons les conditions aux limites ($L = L_k + L_0$):

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C_k \quad (t \in L). \tag{19.1}$$

Ici $f(t)$ est une fonction donnée, univoque et continue sur chacun des contours, les constantes $C_0$ et $C_k$ sont déterminées au cours de la résolution du problème aux limites. On peut fixer l'une d'elles de façon arbitraire, $C_{m+1}$ par exemple, en la posant égale à zéro tout en supposant, bien entendu, que les conditions (18.6) soient réalisées.

Nous rechercherons les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme *)

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}, \tag{19.2}$$

$$\psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\,d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} + \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{z-z_k}. \tag{19.3}$$

$\omega(t)$ est la fonction cherchée, $z_k$ des points arbitrairement donnés dans les domaines $D_k^+$, $b_k$ des constantes réelles déterminées de la manière suivante:

$$b_k = i\int_{L_k} [\omega(t)\,dt - \overline{\omega(t)\,dt}]. \tag{19.4}$$

Remarquons que les représentations (19.2) et (19.3) rappellent par leur forme les représentations analogues de la solution du problème pour le demi-plan.

Nous supposerons que la fonction $\omega(t)$ vérifie la condition H-L. Réalisons dans (19.2) et (19.3), ainsi que dans la représentation tirée de (19.2) pour la fonction $\varphi'(z)$, le passage à la limite de l'extérieur

*) Dans les travaux de D. Sherman [6, 7] l'expression proposée pour $\varphi(z)$ contient des termes complémentaires qui ne sont pas de grande nécessité (ce qui plus tard a été indiqué par l'auteur).

vers les points des contours $L_k$ et de l'intérieur vers les points du contour $L_0$. Portons les expressions obtenues dans les conditions aux limites (19.1); nous aurons alors une équation intégrale de Fredholm

$$\omega(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\,d\ln\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\,d\frac{t-t_0}{\bar t-\bar t_0}+$$
$$+\sum_{k=0}^{m}\frac{b_k}{\bar t_0-\bar z_k}=C_k+f(t)\qquad (t\in L). \qquad (19.5)$$

Dans le premier membre de cette expression est introduit le terme

$$\frac{b_0}{\bar t_0-\bar z_0}, \qquad (19.6)$$

où

$$b_0=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+\frac{\overline{\omega(t)}}{\bar t^2}\,d\bar t\right], \qquad (19.7)$$

et $z_0 = 0$ est inclus pour l'uniformité de l'écriture.

Déterminons les constantes $C_k$ à l'aide des relations

$$C_k=-\int_{L_k}\omega(t)\,ds, \qquad (19.8)$$

où $ds$ est la différentielle d'arc du contour. En tenant compte de ce fait, l'équation (19.5) est transformée en une équation intégrale par rapport à $\omega(t)$.

Montrons que toute solution de l'équation (19.5) annule le nombre $b_0$ si la condition d'égalité à zéro du vecteur résultant des efforts appliqués à tout le corps est réalisée. Pour le démontrer représentons l'équation (19.5) sous la forme

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}+\frac{\bar b_0}{\bar t}-C_j=f(t)\quad (t\in L). \qquad (19.9)$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $d\bar t$ et intégrons. Les fonctions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ étant univoques, nous obtenons

$$\int_L[\varphi(t)\,d\bar t-\overline{\varphi(t)}\,dt]-2\pi i\bar b_0=\int_L f(t)\,d\bar t. \qquad (19.10)$$

Comme tous les termes de cette égalité, sauf $2\pi i\bar b_0$, sont des grandeurs imaginaires, $b_0 = 0$.

Démontrons que l'équation (19.5) est toujours résoluble. Admettons, comme d'ordinaire, que l'équation homogène possède une solution non triviale $\omega_0(t)$. Affectons alors de l'indice « 0 » inférieur les fonctions correspondantes $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ et de l'indice « 0 »

supérieur les constantes $b_k$ et $C_k$, déterminées au moyen des relations (19.2) à (19.4), (19.8). Les fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ doivent vérifier les conditions aux limites

$$\varphi_0(t)+\overline{t\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}-C_k^0=0 \quad (t\in L). \tag{19.11}$$

Du théorème d'unicité vient

$$\varphi_0(z)=i\alpha z+\beta, \quad \psi_0(z)=-\bar{\beta}, \quad C_k^0=0. \tag{19.12}$$

Faisant appel aux formules (19.2) et (19.3) nous parvenons, compte tenu de (19.12), aux égalités

$$i\alpha z+\beta=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z},$$

$$-\bar{\beta}=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar{t}\omega_0'(t)}{t-z}\,dt+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{z-z_k}. \tag{19.13}$$

Introduisons à présent sur tous les contours $L_k+L_0$ les fonctions

$$i\varphi^*(t)=\omega_0(t)-i\alpha t-\beta, \tag{19.14}$$

$$i\psi^*(t)=\overline{\omega_0(t)}-\bar{t}\omega_0'(t)+\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k}{t-z_k}. \tag{19.15}$$

Ces fonctions étant analytiques dans les domaines $D_k^+$, les égalités (19.13) peuvent être récrites sous la forme:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(t)}{t-z}\,dt=0, \quad \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi^*(t)}{t-z}\,dt=0 \quad (z\in D). \tag{19.16}$$

Il découlera de la propriété de l'intégrale de type Cauchy (§ 2) que les fonctions $\varphi^*(t)$ et $\psi^*(t)$ sont valeurs limites de fonctions, analytiques dans les domaines $D_k^+$ et $D_0^-$, et $\varphi^*(\infty)=0$, $\psi^*(\infty)=0$.

On a montré précédemment que le coefficient $b_0=0$ si la condition (18.6) est réalisée. Il est évident que dans notre cas aussi cette condition est vérifiée et c'est pourquoi l'on a $b_0^0=0$. Substituant dans le second membre de (19.7) l'expression de $\omega_0(t)$ tirée de (19.14) nous sommes conduits à l'égalité $\alpha=0$. Eliminant ensuite la fonction $\omega_0(t)$ de (19.14) et (19.15) nous obtenons

$$\overline{\varphi^*(t)}+\bar{t}\varphi^{*\prime}(t)+\psi^*(t)=i\sum_{k=1}^{m}\frac{b_k^0}{\bar{t}-\bar{z}_k}-2i\bar{\beta}. \tag{19.17}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $dt$ et étendons l'intégration à chaque contour $L_k$. Nous parvenons alors aux égalités

$$\int_{L_k} [\overline{\varphi^*(t)}\, dt - \varphi^*(t)\, d\bar{t}] = -2\pi b_k^0 ; \qquad (19.18)$$

il en découle

$$b_k^0 = 0, \qquad (19.19)$$

et c'est pourquoi on obtient

$$\overline{\varphi^*(t)} + \bar{t}\varphi^{*\prime}(t) + \psi^*(t) = -2i\bar{\beta} \quad (t \in L_k).$$

Dès qu'on connaît les fonctions $\varphi^*(z)$ et $\psi^*(z)$, le deuxième problème fondamental est résolu pour chacun des domaines $D_k^+$ pour des valeurs nulles à la frontière. En vertu du théorème d'unicité, pour le domaine $D_0^-$ (compte tenu de ce que $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$ et, par conséquent, $\varphi^*(z) = \psi^*(z) = 0$) nous obtenons que $\beta = 0$. Dans ce cas

$$\varphi^*(z) = i\alpha_k z + \beta_k, \quad \psi^*(z) = -\bar{\beta}_k, \quad (z \in D_k^+).$$

Il s'ensuit, en vertu des formules (19.14), (19.15), que

$$\omega_0(t) = -\alpha_k t + i\beta_k \quad (t \in L_k),$$

$$\omega_0(t) = 0 \quad (t \in L_0).$$

Tenant compte de (19.19) et des égalités $C_k^0 = 0$ nous obtenons que tous les $\alpha_k$ et $\beta_k$ sont nuls et c'est pourquoi $\omega_0(t) \equiv 0$. Donc l'équation (19.5) est toujours résoluble. Si le moment vecteur résultant est nul, $b_0 = 0$. Ceci étant, la solution de l'équation (19.5) coïncide avec la solution de l'équation intégrale initiale. Cette équation est, par conséquent, toujours résoluble.

Considérons maintenant le premier problème fondamental. Nous avons la condition à la limite

$$\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} = f(t) \quad (t \in L). \qquad (19.20)$$

Choisissons dans ce cas pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ la représentation suivante:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\, dt + \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k), \qquad (19.21)$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)}}{t-z}\, dt + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)}{t-z}\, d\bar{t} -$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t)}{(t-z)^2}\, dt - \sum_{k=1}^{m} \varkappa\bar{A}_k \ln(z - z_k), \qquad (19.22)$$

où $A_k$ sont des constantes à déterminer. Exprimons-les au moyen de la fonction $\omega(t)$:

$$A_k = \int_{L_k} \omega(t)\, ds. \qquad (19.23)$$

Réalisons le passage à la limite vers les points des contours dans les expressions de $\varphi(z)$, $\varphi'(z)$ et $\psi(z)$. Après certaines transformations nous obtenons une équation intégrale de la forme suivante:

$$\varkappa\omega(t_0) + \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \omega(t)\, d\ln\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\omega(t)}\, d\frac{t-t_0}{\bar{t}-\bar{t}_0} +$$

$$+ 2\sum_{k=1}^{m} \varkappa \ln(t - z_j) \int_{L_k} \omega(t)\, ds = f(t) \quad (t \in L). \qquad (19.24)$$

Répétant dans les grandes lignes les raisonnements énoncés plus haut, on démontre la résolubilité de l'équation (19.24).

Tous ces raisonnements restent en vigueur également dans le cas où le contour $L_0$ fait défaut.

L'équation intégrale pour le deuxième problème fondamental a été obtenue par I. Khatsirevitch [1]. Le second membre de cette équation, proche en structure des équations de Sherman-Lauricella, est exprimé directement par les contraintes extérieures.

## § 20. Equations intégrales de Sherman-Lauricella (suite)

Les équations intégrales étudiées au paragraphe précédent sont applicables aux problèmes concernant des domaines multiconnexes arbitraires. Indiquons une certaine modification de ces équations qui, en tenant compte de la spécificité des domaines et de la nature des conditions aux limites, permet de simplifier considérablement l'obtention de la solution.

Pour le problème où le domaine lui-même et les conditions aux limites possèdent une symétrie réflexion-miroir et cyclique d'un certain ordre, V. Buïvol [1] a réalisé les transformations adéquates de l'équation (19.5) et a obtenu des équations pour lesquelles le contour d'intégration est la partie non réductible du contour *).

Abordons le problème doublement périodique en nous appuyant sur L. Filchtinski [1] qui l'a considéré dans sa position la plus générale. Supposons qu'on a un parallélogramme de périodes (fig. 10), où $\omega_1$ et $\omega_2$ sont les principales périodes du réseau, $\operatorname{Im}\omega_1 = 0$, $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) = 0$, $\omega_2 = ce^{i\alpha}$, $\operatorname{Im} c = 0$, et à l'intérieur de chacun des parallélogrammes un groupe de trous ne se recouvrant pas, désignés par $L^k_{mn}$, où l'indice supérieur correspond à la numération

*) Certaines corrections sont introduites par S. Vigdergauz [1].

adoptée dans les limites du parallélogramme de base, les indices inférieurs désignent, eux, le parallélogramme correspondant.

Posant le deuxième problème fondamental il faut admettre que la charge appliquée à chacun des contours ne dépend pas des indices inférieurs et que dans tous les cas le vecteur résultant et le moment

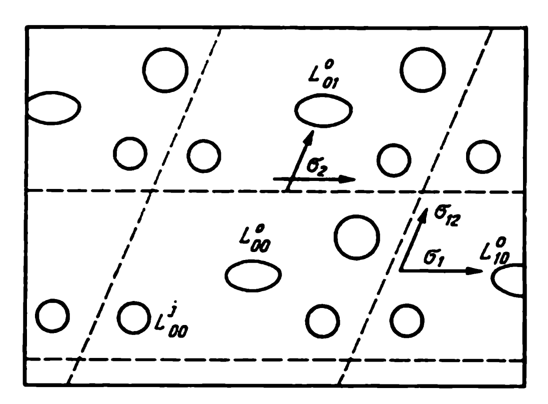



Fig. 10. Parallélogramme des périodes dans le plan pour une disposition doublement périodique de trous.

vecteur résultant sont nuls (dans le cas contraire la périodicité sera violée). En outre, il est nécessaire d'inclure dans la position du problème les valeurs dites moyennes des contraintes $\sigma_1$, $\sigma_2$ et $\sigma_{12}$, appliquées aux bords du parallélogramme de périodes, qui sont équivalentes à celles qu'on avait dans un état homogène de contrainte à l'infini (avec les mêmes valeurs de contraintes).

On utilise pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ les représentations

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\left[\zeta(t-z)-\zeta(t)\right]dt+\sum_{k=1}^{l} b_k\zeta(z-z_k)+Az, \tag{20.1}$$

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \left[\overline{\omega(t)}\,dt+\omega(t)\,d\bar t\right]\left[\zeta(t-z)-\zeta(t)\right]-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L \omega(t)\left[\bar t\rho(t-z)-\rho_1(t-z)\right]dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{l} b_k\left[\zeta(z-z_k)+\rho_1(z-z_k)\right]+Bz, \tag{20.2}$$

où $\zeta(z)$ est la fonction zéta de Weierstrass, $\rho(z)$ la fonction elliptique de Weierstrass, les points $z_k$ sont disposés dans les domaines

$D_{00}^{k+}$, les constantes $b_k$ déterminées par des formules analogues à (19.4), $A$ et $B$ sont des constantes explicitées par les valeurs moyennes des contraintes et les paramètres du réseau. La fonction $\rho_1(z)$ est de la forme (cf. V. Natanson [1])

$$\rho_1(z)=\sum_{mn}{}' \left\{\frac{p}{(z-p)^2}-2z\frac{\bar{p}}{p^3}-\frac{\bar{p}}{p^2}\right\} \quad (p=m\omega_1+n\omega_2). \tag{20.3}$$

L'équation intégrale correspondante est obtenue et étudiée dans l'article cité plus haut de L. Filshtinski.

Notons que le problème périodique pour un plan comportant des trous a été considéré par V. Toropina [1] qui a appliqué la bande de périodes sur un plan présentant une coupure et, utilisant pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ une représentation de type (19.21) et (19.22), a obtenu les équations intégrales correspondantes. L'analyse des propriétés spectrales a montré que l'on peut résoudre ces équations par la méthode des approximations successives.

Arrêtons-nous au problème relatif à la résolution numérique des équations intégrales de Sherman-Lauricella et de leurs modifications. Ces équations sont régulières, donc se laissent résoudre directement par la méthode d'intégration mécanique (cf. § 11), prenant en compte le terme complémentaire (19.6). Afin d'élever la précision il convient d'utiliser le fait que les intégrales étendues aux noyaux présents dans les équations de Sherman-Lauricella se calculent sous forme explicite. C'est pourquoi tout terme des sommes intégrales peut être représenté comme le produit de la valeur de la densité au point d'appui par l'expression correspondante.

Nous passerons à la détermination des contraintes dans le corps élastique après avoir trouvé la solution de l'équation intégrale. Pour les points intérieurs ce problème se résout de façon élémentaire puisque les représentations des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ (19.2), (19.3) sont régulières. Mais ce sont les points du contour qui présentent le plus d'intérêt et par ailleurs le plus de complexité (notamment liée à la détermination de la fonction $\varphi'(t)$).

K. Zapparov et P. Perline [1] font appel pour résoudre ce problème à l'appareil de la théorie des splines (cf. § 9). Désignons par $t_k^0$ les points d'appui et par $t_k$ les points nodaux. Nous aurons alors, pour la fonction $\varphi(z)$ par exemple, la représentation

$$\varphi(t_k^0)=\frac{1}{2}\omega(t_k^0)+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{N}\omega(t_j^0)\ln\frac{t_{j+1}-t_k^0}{t_j-t_k^0}. \tag{20.4}$$

Construisons sur chaque tronçon $t_{k-1}^0$, $t_k^0$ le spline cubique

$$\tilde{\omega}(t)=\sum_{m=0}^{3}a_k^m(t_k^0-t)^m.$$

La dérivée $\tilde{\omega}'(t)$ au point $t_k^0$ sera alors égale à $-a_k^1$. Pour la fonction $\varphi'(t)$ nous avons la représentation

$$\varphi'(t_k^0) = \frac{1}{2}\omega'(t_k^0) + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{N} a_j^1 \ln \frac{t_{j+1}-t_k^0}{t_j-t_k^0}. \qquad (20.5)$$

L'expression (20.5) permet de déterminer aux points du contour la composante tangentielle des contraintes (d'après la formule $\sigma_t = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(t) - \mathrm{Im}\,f'(t)$).

Les résultats des calculs de $\sigma_t$ sont donnés sur la figure 11 pour l'extérieur d'un carré et sur la fig. 12 pour l'extérieur d'un contour

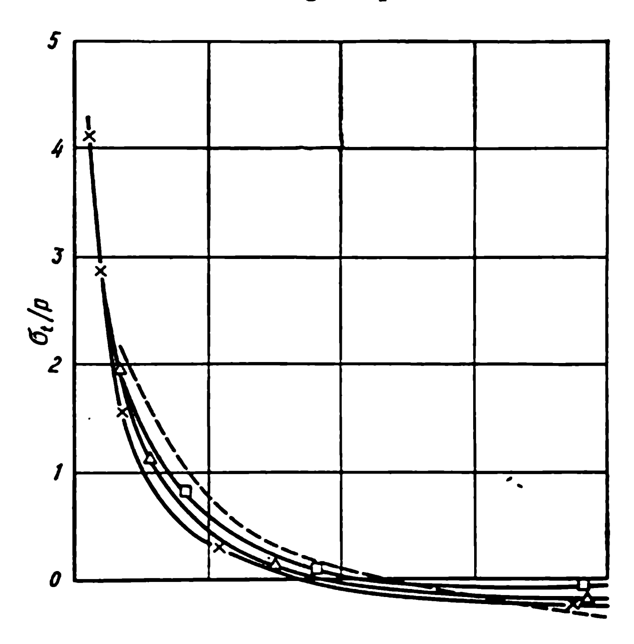



Fig. 11. Composante tangentielle des contraintes dans une lame comportant un trou carré lors d'un chargement par une pression hydrostatique $p$ (pour un octant). Sur le côté du carré sont donnés 10 (□), 20 (△) et 40 (×) segments, la ligne en pointillés est la solution de G. Savine [1].

de forme spéciale. Dans tous les cas le chargement était une pression hydrostatique $p$. On a représenté également sur la fig. 11 la solution (en pointillé) trouvée au moyen de l'application conforme (cf. G. Savine [1]). Le caractère cyclique et la symétrie réflexion-miroir étaient, bien entendu, pris en compte.

Etudions les équations intégrales pour des plaques en flexion appuyées. Les relations aux limites pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont (16.20) et (16.21). Remarquons qu'un problème aux limites

analogue se pose dans les états plans de contrainte et les états plans de déformation, quand la composante normale des déplacements et la composante tangentielle des contraintes sont données à la frontière.

Z. Khalilov [1] a été le premier à essayer d'élaborer des équations intégrales pour des plaques en flexion appuyées. Il s'y prend d'une manière analogue à celle qui a conduit Muskhelishvili à l'équation intégrale du § 18 et obtient, lui, une équation intégro-différentielle

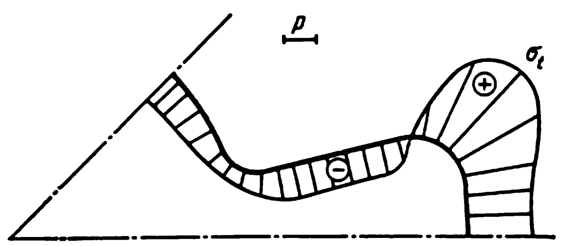



Fig. 12. Composante tangentielle des contraintes dans une lame présentant une coupure de forme complexe lors d'un chargement par une pression hydrostatique $p$ (pour un octant).

qu'il parvient à transformer ensuite en équation de Fredholm. Mais il est obligé d'introduire dans ses raisonnements une restriction concernant la forme du contour, notamment que la courbure soit partout non nulle, dictée uniquement par l'appareil utilisé. Le procédé proposé par M. Fridman [1] est exempt de cette restriction. L'auteur construit à la première étape une équation intégro-différentielle singulière, son étude étant effectuée pour un domaine multiconnexe.

A. Kalandia [1] moyennant les représentations de I. Vekua [1] pour les fonctions analytiques

$$\Phi(z) = \int_L \mu(t) \ln\left(1 - \frac{z}{t}\right) ds + \int_L \mu(t)\, ds \qquad (20.6)$$

a pu obtenir un système d'équations intégrales singulières et démontrer sa résolubilité en partant des principes de la théorie de systèmes de ce genre (cf. N. Vekua [1]). A la première étape l'auteur a réalisé une transformation équivalente des conditions aux limites (16.20) et (16.21) en intégrant l'une de celles-ci et l'ajoutant à l'autre. D. Sherman [18] a réalisé une autre transformation des conditions aux limites, différentiant l'une de celles-ci et l'ajoutant à l'autre. Le but de ces transformations est d'égaliser l'ordre des dérivées contenues dans les conditions aux limites. Dans cet article les représentations proposées pour les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ conduisent à des équations intégrales régulières. Partant de raisonnements analogues, D. Sherman [19] a étudié également le cas général d'un domaine multiconnexe.

## § 21. Domaines multiplement connexes (biconnexes)

La question de la résolubilité des problèmes de la théorie de l'élasticité, il est vrai, a déjà fait l'objet de notre considération aux §§ 19, 20 où l'exposé était conduit d'emblée pour le cas des domaines de connexion arbitraire. Plus encore, il s'avère possible de résoudre les problèmes pour des domaines multiplement connexes au moyen d'algorithme alterné ramenant la question à un ensemble de problèmes successivement résolubles. A titre d'exemple pour un domaine limité de l'intérieur par le contour $L_1$ et de l'extérieur par le contour $L_0$ on peut agir de la façon suivante : résoudre le problème intérieur pour le domaine $D_0^+$ et une condition aux limites donnée sur le contour $L_1$, puis résoudre le problème extérieur pour le domaine $D_1^-$ et une condition aux limites représentant la différence entre la condition aux limites donnée et celle tirée de la solution que l'on vient d'obtenir, et ainsi de suite. Les questions de convergence d'une telle approche sont traitées par S. Sobolev [1]. Cet algorithme est toutefois difficile à réaliser puisqu'il est nécessaire d'augmenter considérablement le nombre d'étapes lorsqu'on rapproche les limites.

Comme, par ailleurs, on ne trouve pas dans la littérature spécialisée de données sur la résolution des problèmes au moyen des équations intégrales de Sherman-Lauricella (ou d'autres) pour des domaines multiplement connexes pour de petites distances entre les frontières, une méthode spéciale, qui est à vrai dire effectivement valable pour les domaines biconnexes uniquement, présente de l'intérêt. La première publication à ce sujet (D. Sherman [12]) portait sur la résolution du problème du potentiel harmonique (dans son application à la torsion des tiges), suivie par un cycle assez important de travaux concernant le problème plan. La liste détaillée en est donnée dans le tour d'horizon de D. Sherman [21]).

Exposons cette méthode pour le problème plan (dans le cas de contraintes données sur les contours $L_0$ et $L_1$). Il faut déterminer les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ dans le domaine $D$ pour les conditions aux limites

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_1(t) \quad (t \in L_0), \tag{21.1}$$

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f_2(t) \quad (t \in L_1). \tag{21.2}$$

Introduisons sur l'un des contours, sur $L_0$ par exemple, une fonction auxiliaire $\omega(t)$, définie par la relation

$$2\omega(t) = \varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} \quad (t \in L_0). \tag{21.3}$$

On obtient d'emblée des conditions (21.1) et (21.3) que

$$\varphi(t) = \omega(t) + 0{,}5 f_1(t),$$
$$\psi(t) = -\overline{\omega(t)} - \bar{t}\omega'(t) + 0{,}5\,[\bar{f}_1(t) + \bar{t} f_1'(t)].$$

Il est démontré par ailleurs que les fonctions

$$\varphi_*(z) = \varphi(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\omega(t) + 0{,}5 f_1(t)}{t - z}\, dt, \qquad (21.4)$$

$$\psi_*(z) = \psi(z) + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \frac{\overline{\omega(t)} + \bar{t}\omega'(t) - 0{,}5[\overline{f_1(t)} + \bar{t} f_1'(t)]}{t - z}\, dt \qquad (21.5)$$

sont analytiques dans le domaine $D_1^-$. Aussi peut-on passer (admettant la fonction $\omega(t)$ conventionnellement donnée) à un problème auxiliaire pour ce domaine avec des conditions aux limites dûment modifiées. On a

$$\varphi_*(t) + t\overline{\varphi_*'(t)} + \overline{\psi_*(t)} = f_2(t) + H(t, \omega, f_1), \qquad (21.6)$$

où $H(t, \omega, f_1)$ est l'écriture symbolique de la somme des termes de la condition aux limites, formée des termes complémentaires.

Notons $\varphi_*(z, f_2, H)$ et $\psi_*(z, f_2, H)$ la solution de ce problème aux limites (sans s'arrêter au processus de son obtention) et revenons à la condition (21.3) *), en la transformant à l'aide des fonctions $\varphi_*(z)$ et $\psi_*(z)$. Nous obtenons en résultat une équation intégrale régulière de Fredholm

$$\omega(t) = \varphi_*(t_0) - t_0\overline{\varphi_*'(t_0)} - \overline{\psi_*(t_0)} + \\ + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \omega(t)\, d\ln\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0} \overline{\omega(t)}\, d\frac{t - t}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \frac{1}{4}(f_1' + \bar{f}_1') + \\ + \frac{1}{4\pi i}\int_{L_0} f_1(t)\, d\ln\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0} - \frac{1}{4}\,\frac{1}{\pi i}\int_{L_0} \overline{f_1(t)}\, d\frac{t - t_0}{\bar{t} - \bar{t}_0}. \qquad (21.7)$$

Il est à remarquer que dans la résolution de problèmes concrets par cette méthode l'un des contours était en général une circonférence (cf. D. Sherman [21]); sur celui-ci précisément était introduite la fonction auxiliaire, qui se développait d'emblée en série de Fourier, permettant par cela même d'obtenir tous les termes complémentaires sans efforts considérables. Au lieu d'une équation intégrale, un système d'équations linéaires était construit à la dernière étape. Comme ce système correspondait à une équation différentielle du second ordre, sa structure s'avérait avantageuse. P. Perline [1] a démontré que moyennant des hypothèses assez générales ces systèmes sont quasiréguliers.

Notons l'article de P. Mochkine [1] où aucun des contours n'est circonférence, les deux étant pris sous forme d'ellipse. L'auteur introduit un contour auxiliaire, à savoir une circonférence disposée dans le domaine qu'occupe le corps élastique, et résout ensuite indépendamment deux problèmes relatifs à l'équilibre d'un couple de

*) Le recours à la condition (21.1) n'est pas toujours à conseiller, puisqu'on obtient alors une équation intégrale singulière.

domaines biconnexes, limités respectivement de l'intérieur et de l'extérieur par la circonférence, sous la condition de la coïncidence des contraintes et des déplacements sur celle-ci. Il convient d'indiquer que les difficultés liées au calcul des termes qui sont déterminés à l'aide de la fonction $\omega(t)$ (si le contour est différent d'une circonférence) peuvent être surmontées également si l'on utilise les polynômes de Faber.

Le problème périodique pour un plan comportant des trous circulaires centrés tous sur une même droite est considéré par D. Sherman [25]. Le problème pour un plan comportant trois trous circulaires identiques, dont les centres forment un triangle équilatéral, avec des conditions aux limites présentant un axe de symétrie, est résolu par N. Kryukova [2]. Le problème d'un disque comportant des trous circulaires avec des conditions de symétrie cyclique est étudié par V. Kulish et B. Obodovski [1].

Cette méthode est, bien entendu, applicable aussi quand sont données sur les contours $L_0$ et $L_1$ des conditions aux limites de différents types. Plus encore, on peut admettre que sur l'un des contours, sur $L_0$ par exemple, sont données les conditions du premier ou du deuxième problème, et sur l'autre, des conditions de type mixte. Il importe alors d'introduire comme auparavant sur le contour $L_0$ une fonction $\omega(t)$ et de passer au problème auxiliaire, maintenant mixte, pour le domaine $D_1^-$. Dans les travaux de I. Aramanovitch [1] et I. Aramanovitch, N. Fotieva, V. Lytkine [1] ce schéma est réalisé sur l'exemple de l'enfoncement d'une étampe dans un demi-plan comportant un trou circulaire.

## § 22. Problèmes de la théorie de l'élasticité pour les corps homogènes par morceaux

Considérons le problème plan de la théorie de l'élasticité pour les corps homogènes par morceaux. Soit connu au § 19 un domaine multiplement connexe $D$ délimité par les contours continûment différentiables $L_k$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ et $L_0$. Tous les contours, excepté $L_0$, sont disposés en dehors l'un de l'autre, et le contour $L_0$ englobe tous les autres. Le domaine $D$ est rempli d'un milieu élastique, dont les constantes sont $\varkappa$ et $\mu$. Les domaines $D_k^+$, délimités par les contours $L_k$ $(k \neq 0)$, sont remplis de milieux avec les constantes $\varkappa_k$ et $\mu_k$. Par raison de commodité on introduit dans ce qui suit à la place de la constante de Lamé $\lambda$ la constante $\varkappa$ (différente dans le cas de déformation plane et d'état plan de contrainte). On décrira l'état de contrainte dans chaque domaine $D_k^+$ et $D$ par les fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$, supposant données certaines conditions aux interfaces des milieux. Sont d'un grand intérêt pour les applications les conditions où le vecteur des contraintes varie de façon continue sur $L_k$, alors que le vecteur des déplacements subit un saut donné $\mu_k(t)$ (la fonc-

tion $\mu_k(t)$ étant de classe H-L). Le contour extérieur peut être soumis aux conditions aussi bien du premier que du deuxième problème (et même du problème mixte). Présentons toutes les conditions aux limites qui sont nécessaires pour la détermination des fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$:

$$\varphi_k(t)+t\overline{\varphi_k'(t)}+\overline{\psi_k(t)}=\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)} \quad (t\in L_k), \qquad (22.1)$$

$$\varkappa_k\varphi_k(t)-t\overline{\varphi_k'(t)}-\overline{\psi_k(t)}=$$
$$=\varkappa\varphi(t)-t\overline{\varphi'(t)}-\overline{\psi(t)}+\frac{\mu}{\mu_k}\mu_k(t) \quad (t\in L_k), \qquad (22.2)$$

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t) \quad (t\in L_0). \qquad (22.3)$$

Pour fixer les idées, on se donne au contour $L_{m+1}$ les conditions du deuxième problème fondamental.

Nous allons commencer notre considération par le cas particulier, où toutes les constantes $\varkappa$ et $\mu$ sont identiques. Nous appuyant sur D. Sherman [5], transformons les équations (22.1) et (22.2) en

$$\varphi_k(t)=\varphi(t)+\frac{1}{1+\varkappa}\mu_k^1(t) \quad (t\in L_k), \qquad (22.4)$$

$$\psi_k(t)=\psi(t)+\bar{t}\psi'(t)+\frac{1}{1+\varkappa}[\overline{\mu_k^1(t)}+\bar{t}\mu_k^{1\prime}(t)],$$

$$\mu_k^1(t)=\frac{\mu_0}{\mu_k}\mu_k(t). \qquad (22.5)$$

On peut montrer que les fonctions

$$\varphi(z)-\frac{1}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\mu_k^1(t)}{t-z}\,dt \quad (z\in D),$$

$$\varphi_k(z)-\frac{1}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\mu_k^1(t)}{t-z}\,dt \quad (z\in D_k^+)$$

représenteront une fonction unique, analytique dans tout le domaine $D_0^+$ qu'on notera dans ce qui suit $\varphi_0(z)$. Un résultat analogue pour les fonctions

$$\psi(z)+\frac{1}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\mu_k^1(t)+\bar{t}\mu_k^{1\prime}(t)}{t-z}\,dt \quad (z\in D),$$

$$\psi_k(z)+\frac{1}{1+\varkappa}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\overline{\mu_k^1(t)}+\bar{t}\mu_k^{1\prime}(t)}{t-z}\,dt \quad (z\in D_k^+)$$

conduit à la fonction $\psi_0(z)$, analytique dans le domaine $D_0^+$.

Compte tenu de ce qui vient d'être dit, écrivons la condition aux limites pour les fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sous la forme

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f(t) + H(t, \mu_k^1) \quad (t \in L_0), \qquad (22.6)$$

où $H(t, \mu_k^1)$ est l'écriture symbolique des termes déterminés au moyen des fonctions $\mu_k^1(t)$. Le calcul des termes complémentaires présents dans les expressions des fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$ est élémentaire dans le cas où les contours $L_k$ sont des circonférences (par développement des fonctions en séries de Fourier). Dans les autres cas il convient d'avoir recours à l'appareil des polynômes de Faber (cf. par exemple Yu. Amenzadé, T. Agaev [1] et Yu. Chaliukhine [1]).

Notons que cette approche peut être utilisée également dans les cas où certains des domaines $D_k^+$ comportent eux-mêmes des trous remplis de milieux élastiques si les contours sont soumis aux conditions de type (22.1) et (22.2).

Considérons maintenant le cas général lorsque les constantes élastiques sont variées. Arrêtons-nous à la méthode de S. Mikhline [1] qui suppose connue la fonction complexe de Green pour chacun des domaines $D_k^+$. Ceci permet d'expliciter immédiatement (moyennant l'intégrale de Cauchy dans les termes réguliers) les fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$ en partant des conditions aux limites (22.1) ou (22.2) et conduisant les raisonnements comme si les deux membres de l'égalité étaient connus. Après quoi, faisant appel respectivement à l'égalité (22.2) ou (22.1), l'auteur parvient à un système toujours résoluble d'équations intégrales singulières d'ordre $m + 1$.

D. Sherman [9] représente dans chacun des domaines $D_k^+$ les fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$ sous forme (19.2) et (19.3), réalisant ensuite dans celles-ci le passage à la limite vers les points des contours $L_k$ et $L_0$. Les égalités (22.1) à (22.3) conduisent alors à des équations intégrales régulières d'ordre $2m + 1$. Des représentations de ce genre ont été utilisées par L. Filshtinski [2] pour la construction d'équations intégrales régulières dans le cas d'un problème doublement périodique quand le parallélogramme de périodes comporte un certain nombre d'inclusions.

Arrêtons-nous maintenant plus en détail sur la méthode de D. Sherman [20], ramenant le problème à un système d'équations singulières de deuxième espèce d'ordre $m + 1$. Par souci de simplicité limitons-nous au cas de $m = 1$. Nous avons alors sur le contour $L_1$ les relations

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} &= \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}, \\ \varkappa_1\varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} &= \varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)} + \frac{\mu}{\mu_1}\mu_1(t). \end{aligned}\right\} \qquad (22.7)$$

Introduisons la fonction auxiliaire $\omega(t)$ conformément à l'égalité

$$\omega(t) = \varphi_1(t) - t\overline{\varphi_1'(t)} - \overline{\psi_1(t)} - \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} \quad (t \in L_1). \qquad (22.8)$$

Construisons les intégrales de type Cauchy

$$\varphi^*(z)=\frac{1}{(1+\varkappa_1)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\psi^*(z)=\frac{1}{(1+\varkappa_1)}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\overline{\omega(t)}+\bar{t}\omega'(t)}{t-z}\,dt.$$

Moyennant les égalités

$$\varphi_0(z)=\varphi(z)-\varphi^*(z),\quad \psi_0(z)=\psi(z)+\psi^*(z)\qquad (z\in D),$$

$$\varphi_0(z)=\varphi_1(z)-\varphi^*(z),\quad \psi_0(z)=\psi_1(z)+\psi^*(z)\qquad (z\in D_1^+)$$

on peut alors passer au problème relatif à un domaine continu: $\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=H(\omega,t)$.

Présentons la solution de ce problème sous la forme symbolique:

$$\varphi_0(z)=H_1(\omega,z),\quad \psi_0(z)=H_2(\omega,z).\tag{22.9}$$

Réalisons le passage inverse aux fonctions $\varphi_k(z)$ et $\psi_k(z)$ et utilisons la seconde des relations (22.7), qui nous conduit à une équation intégrale singulière:

$$a\omega(t_0)+\frac{b}{\pi i}\int\limits_{L_1}\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt+N(\omega,t_0)=\frac{\mu}{\mu_1}\,\mu_1(t),$$

$$a=\frac{1}{2}\left[\frac{\varkappa_1+1}{\mu_1}+\frac{\varkappa+1}{\mu}\right],\quad b=\frac{1}{2}\left[\frac{\varkappa_1-1}{\mu_1}-\frac{\varkappa-1}{\mu}\right].\tag{22.10}$$

Les termes du premier membre de l'équation (22.10), notés tous ensemble $N(\omega, t_0)$, sont des opérateurs réguliers par rapport à la fonction recherchée $\omega(t)$. La méthode a trouvé une large application (cf. Yu. Amenzadé [1]).

Il convient de noter que les méthodes exposées plus haut permettant d'obtenir des équations intégrales dans un cas plus général également quand les surfaces délimitées par certains contours $L_k$ comportent des trous. Remarquons que ces questions et d'autres voisines sont étudiées au § 35 en partant des positions générales du problème spatial.

CHAPITRE V

# QUELQUES QUESTIONS SPÉCIFIQUES DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ BIDIMENSIONNELLE

## § 23. Problèmes de la théorie de l'élasticité pour les corps présentant des coupures

Soit, dans le plan de la variable complexe $z$, $m$ contours continûment différentiables ouverts ne se coupant pas, dont les extrémités sont notées respectivement $a_k$ et $b_k$. On pose le problème de la théorie de l'élasticité pour un plan présentant des coupures le long des contours $L_k$, supposant donnés sur les bords de celles-ci les contraintes ou les déplacements. Pour fixer les idées, limitons-nous au deuxième problème fondamental. Il s'agit de déterminer les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ dans tout le plan sous les conditions

$$\varphi^+(t)+t\overline{\varphi^{+\prime}(t)}+\overline{\varphi^+(t)}=f^+(t)+C_k \qquad (t\in L_k). \tag{23.1}$$

$$\varphi^-(t)+t\overline{\varphi^{-\prime}(t)}+\overline{\varphi^-(t)}=f^-(t)+C_k \tag{23.2}$$

Le signe « + » signifie que la limite est prise à gauche lorsqu'on se meut du point $a_k$ vers le point $b_k$, et le signe « — » qu'elle est prise à droite (comme au § 2). Les fonctions $f^{\pm}(t)$ sont supposées données et de classe H-L. Les constantes $C_k$ sont trouvées au cours de la résolution du problème. L'égalité à zéro du vecteur résultant des efforts extérieurs se manifeste dans l'univocité des fonctions $f^{\pm}(t)$.

Pour les cas particuliers où toutes les coupures sont disposées sur une même droite ou circonférence, de tels problèmes se résolvent effectivement par la méthode de conjugaison (§§ 26, 27).

Nous allons établir l'équation intégrale singulière générale en développant la méthode exposée au § 22 lors de la considération des problèmes pour des corps composés.

Simplifions au préalable la position du problème en supposant que les fonctions $f^+(t)$ et $f^-(t)$ coïncident entre elles (en d'autres termes, supposant que le vecteur des contraintes varie de façon continue lors du passage à travers la coupure). Le passage du cas général de chargement au cas mentionné ne présente pas de difficulté. Il faut pour cela introduire dans tout le plan des fonctions complémentaires

$$\psi_0(z)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{f^-(t)-f^+(t)}{t-z}\,dt,\qquad \varphi_0(z)=0.$$

On aboutit alors pour les nouvelles fonctions $\varphi_*(z) = \varphi(z)$ et $\psi_*(z) = \psi(z) - \psi_0(z)$ aux conditions requises:

$$\varphi_*^+(t) + t\,\overline{[\varphi_*^+(t)]'} + \overline{\psi_*^+(t)} = \varphi_*^-(t) + t\,\overline{[\varphi_*^-(t)]'} + \overline{\psi_*^-(t)} = \frac{f^+(t) + f^-(t) + 2C_k}{2} = f(t) + C_k. \qquad (23.3)$$

Introduisons sur les coupures $L_k$ des fonctions auxiliaires $\mu_k(t)$ définies comme suit (l'indice « * » est omis) :

$$\mu_k(t) = \varkappa\varphi^+(t) - t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} - \overline{\psi^+(t)} - \varkappa\varphi^-(t) + t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} - \overline{\psi^-(t)}. \qquad (23.4)$$

La signification physique des fonctions $\mu_k(t)$ est claire : elles représentent des sauts de déplacement (au facteur $^1/_2\,\mu$ près). D'où l'intérêt d'inclure dans la position du problème la condition d'égalité à zéro de ces fonctions aux extrémités des segments.

On s'assure par substitution immédiate que les fonctions

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)} \int_{L_k} \frac{\mu_k(t)}{t-z}\,dt,$$

$$\psi(z) = -\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2\pi i(1+\varkappa)} \int_{L_k} \frac{\overline{\mu_k(t)} + \bar{t}\mu_k'(t)}{t-z}\,dt$$

vérifient identiquement la première des conditions (23.3) exprimant la continuité des contraintes extérieures sur les coupures. Faisant appel à la seconde des égalités (23.3) déterminant ces contraintes nous parvenons (utilisant les formules (2.9)) à une équation intégrale singulière

$$\sum_{k=1}^{m} \left\{ \frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{\mu_k(t)}{t-t_0}\,dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \mu_k(t)\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} - \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \overline{\mu_k(t)}\,d\,\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} = (\varkappa+1)\,[f(t_0) + C_k] \quad (t_0 \in L_k). \qquad (23.5)$$

Puisqu'il convient de rechercher la solution de cette équation dans la classe de fonctions bornées aux points extrémités (on peut montrer, en utilisant l'expression de la fonction canonique, qu'il découle de cette condition l'égalité à zéro de la solution, comme on l'a supposé dans la position du problème), l'indice de l'équation s'obtient égal à $-m$. Ceci étant, l'équation s'avère résoluble uniquement quand est réalisée la condition (18.6) exprimant l'orthogonalité de la composante réelle du second membre à toutes les fonctions propres de l'équation associée. Dans le cas où les coupures sont disposées sur une droite (le long de l'axe réel), l'équation se simpli-

fie et prend une forme tout à fait élémentaire

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{\mu_k(t)}{t-t_0}\, dt = (\varkappa+1)\,[f(t_0)+C_k] \quad (t_0 \in L_k). \qquad (23.6)$$

On utilise souvent (cf. par exemple, L. Libatski [1], L. Libatski, S. Baranovitch [1] et L. Libatski, M. Bida [1]) au lieu de l'équation (23.6) l'équation qui s'en obtient par différentiation par rapport à la variable $t_0$ suivie de l'intervertissement de l'ordre d'intégration et de différentiation, ce qui conduit à une équation intégrale singulière par rapport aux fonctions $\mu_k'(t)$ :

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\pi i} \int_{L_k} \frac{\mu_k'(t)}{t-t_0}\, dt = (\varkappa+1)\, f'(t_0) \quad (t_0 \in L_k). \qquad (23.7)$$

Puisqu'on recherche dans ce cas une solution non bornée à toutes les extrémités, elle contiendra donc des constantes arbitraires que l'on peut déterminer à partir de la condition d'univocité des déplacements lors du parcours des contours $L_k$.

Malheureusement, l'analyse comparative des approches mentionnées est inexistante dans la littérature spécialisée. Notons que dans les articles cités plus haut de L. Libatski et autres, ainsi que dans l'article de V. Kopasenko il est recommandé de représenter la solution $\mu_k'(t)$ sous la forme du produit d'une série, contenant des coefficients indéterminés, par un facteur adéquat, qui récèle la spécificité de la solution ; on peut également représenter la solution sous la forme d'une somme dont les termes seraient les termes de la même série que plus haut et un terme spécial (sous la forme du facteur ci-dessus), avec des coefficients devant être simultanément déterminés.

Passons à la considération du cas où le domaine occupé par le corps élastique est limité (de l'extérieur ou de l'intérieur) par un contour quelconque $L$. Nous chercherons les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sous la forme des sommes

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+\varkappa)\,2\pi i} \int_{L_k} \frac{\mu_k(t)}{t-z}\, dt, \qquad (23.8)$$

$$\psi(z) = \psi_0(z) - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(1+\varkappa)\,2\pi i} \int_{L_k} \frac{\overline{\mu_k(t)} + \bar{t}\mu_k'(t)}{t-z}\, dt, \qquad (23.9)$$

où $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ sont des fonctions analytiques dans le domaine continu $D$. Nous parvenons dans ce cas à un système d'équations singulières, différant de (23.7) uniquement par la présence du terme

$[\varphi_0(t_0) + t_0\overline{\varphi_0'(t_0)} + \overline{\psi_0(t_0)}]$. Il faut introduire, en outre, des équations tenant compte des conditions aux limites sur le contour frontière $L$. Utilisant une représentation quelconque des fonctions $\mu_k(t)$, on peut déterminer les fonctions $\varphi_0(z)$ et $\psi_0(z)$ (pour un second membre conventionnellement donné) et, par passage inverse aux fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$, tirer de la condition aux limites sur les contours $L_k$ les paramètres donnés précédemment pour la représentation des fonctions $\mu_k(t)$.

Il est naturel de s'attendre que pour une distance suffisamment petite entre les coupures, ainsi qu'entre les coupures et le contour frontière, l'élaboration effective de la solution soit liée à une complication et pour la surmonter on devra faire appel à des calculs beaucoup plus fins (cf. S. Yaréma [1]). Il est à espérer que la méthode alternée (cf. A. Linkov [1]) s'avérera efficace pour un éloignement suffisant des contours.

Le procédé proposé plus haut de résolution des problèmes relatifs aux corps (qui ne sont pas des plans complets) présentant des coupures consiste à les ramener à un problème relatif à un milieu continu (moyennant certains « rajouts »). On peut agir autrement, précisément obtenir un problème auxiliaire pour le plan tout entier (présentant les mêmes coupures) (cf. S. Zargarian, R. Enfiadjian [1]). Pour cela il convient d'introduire sur le contour extérieur une fonction inconnue, de même qu'on introduisait la fonction $\omega(t)$ lors de l'étude des domaines biconnexes (§ 21). La forme concrète que l'on doit donner à cette fonction dépend de la nature des conditions aux limites. Après avoir construit les termes complémentaires correspondants (sous forme d'intégrales de type Cauchy) on passe au problème pour le plan tout entier. Résolvant celui-ci d'une façon quelconque on obtient pour la fonction introduite au début une équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce.

Les calculs présentés aux travaux cités se rapportent au cas où la coupure est éloignée de la frontière extérieure, ce qui rend impossible d'effectuer la comparaison fort souhaitable des deux approches analysées plus haut.

Il est naturel de s'attendre que quand la distance entre les coupures et la frontière extérieure diminue, la convergence des logarithmes cités se détériore de même que cela avait lieu lors de la résolution des problèmes relatifs aux domaines biconnexes et multiplement connexes. Citons l'article de Yang Wei Hguin *[1] où cette affirmation est énoncée lors de la résolution d'une équation singulière analogue, apparaissant il est vrai au cours de l'étude d'un autre problème, problème de la flexion d'une plaque avec appui interne rigide.

Remarquons que divers auteurs (cf. R. J. Hartranft, G. C. Sih *[2]) font appel à la méthode alternée consistant en l'examen par étapes des problèmes pour un corps présentant une coupure intérieure et pour un corps continu.

Envisageons les problèmes relatifs à la flexion des plaques présentant des coupures (cf. A. Linkov, V. Merkulov [1]). Avant de passer à la formulation mathématique soulignons que la position de problèmes semblables (dans leur forme propre) se trouve en contradiction avec les principes qui sont à la base de la théorie de flexion, puisque les problèmes de ce genre sont purement tridimensionnels. Ils présentent toutefois un intérêt pratique certain.

Dans ce cas (avec l'égalité à zéro des moments de flexion et des forces tranchantes) nous sommes conduits à des conditions aux limites sur les coupures $L_k$, analogues à (23.1), (23.2):

$$\varkappa\varphi^+(t) - t\overline{\varphi^{+\prime}(t)} - \overline{\psi^+(t)} = f^+(t) + iD_k t + C_k \quad (t \in L_k), \quad (23.10)$$

$$\varkappa\varphi^-(t) - t\overline{\varphi^{-\prime}(t)} - \overline{\psi^-(t)} = f^-(t) + iD_k t + C_k. \quad (23.11)$$

Les fonctions $f^+(t)$ et $f^-(t)$ sont les notations des expressions extraites de la solution particulière de l'équation non homogène de flexion (cf. § 18), $D_k$ sont des constantes réelles et $C_k$, comme auparavant, des constantes complexes. Donc ce problème ne diffère du problème plan que par la présence des fonctions $D_k(t)$ dans le second membre.

L'introduction d'une fonction auxiliaire (analogue à (23.4)) permet d'obtenir une équation intégrale singulière. Ici aussi sont de rigueur les conditions de nullité de la fonction auxiliaire aux extrémités. En outre, il importe de prendre en compte les conditions d'univocité des déplacements (lors du parcours de chaque coupure). Toutes ces conditions conduisent à un système d'équations pour les constantes $C_k$ et $D_k$, dont la résolubilité découle de l'unicité de la solution du problème même de flexion.

## § 24. Equations intégrales des problèmes mixtes (de contact)

Abordons la position du problème mixte de la théorie de l'élasticité. Supposons qu'un corps occupe un domaine fini $D^+$ délimité par le contour continûment différentiable $L$. Choisissons sur ce contour les arcs $L_k'$ qui ne se coupent pas et ont leurs extrémités aux points $a_k$, $b_k$ ($k = 1, 2, \ldots, m$). Le parcours est, comme auparavant, réalisé de telle sorte que le domaine considéré reste à gauche. Notons $L_k''$ $(b_k, a_{k+1})$ ($a_{m+1}$ se confondant avec $a_1$) les parties restantes du contour; on obtient de la sorte deux systèmes d'arcs: $L'$ et $L''$.

Le problème mixte de la théorie de l'élasticité consiste à déterminer dans le domaine $D^+$ les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ pour les conditions aux limites

$$\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} = f(t) + C_k \quad (t \in L'), \quad (24.1)$$

$$-\varkappa\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f(t)\qquad(t\in L''),\tag{24.2}$$

$$f(t)=i\int_{a_k}^{t}(X_n+iY_n)\,ds\qquad(t\in L'),$$

$$f(t)=2\mu(u+iv)\qquad(t\in L'').$$

Ici $C_k$ est une grandeur constante prise sur chaque arc $L'$ qu'on tétermine au cours de la résolution du problème. La fonction $f(t)$ dt de classe H-L sur tous les arcs du contour $L$.

əs On utilise pour construire l'équation intégrale les mêmes représ ntations des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ que celles utilisées au § 19 se9.2) et (19.3), puis en vertu des formules (2.9) on obtient les valeurs (1mites (de l'intérieur) des fonctions $\varphi^+(t)$, $\varphi^{+\prime}(t)$ et $\psi^+(t)$, qui, liortées dans les conditions aux limites (24.1), conduisent à l'équapion recherchée

$$K\omega\equiv A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L\frac{\omega(t)}{t-t_0}\,dt+\int_L k_1(t_0,t)\,\omega(t)\,dt+$$
$$+\int_L\overline{k_2(t_0,t)}\,\overline{\omega(t)}\,\overline{dt}=f(t_0)+C(t_0).\tag{24.3}$$

Ici

$$k_1(t_0,t)=\frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0},\qquad k_2(t_0,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0},$$

$$\{A(t_0),\ B(t_0),\ C(t_0)\}=\left\{\begin{array}{ccc}(1-\varkappa)/2, & (1+\varkappa)/2, & C_k\\ -\varkappa, & 0 & 0\end{array}\right\}\begin{array}{l}(t_0\in L')\\ (t_0\in L'').\end{array}$$

Les constantes $C_k$ sont déterminées de la condition de résolubilité de l'équation intégrale en classe $h_{2m}$, ce qui conduit au système

$$\operatorname{Re}\int_L[f(t)+C(t)]\,\sigma_k(t)\,dt=0\qquad(k=1,2,\ldots,m),\tag{24.4}$$

où $\sigma_k(t)$ est le système complet des solutions de classe $h_0$ de l'équation associée.

L'étude de la résolubilité de l'équation (24.3) et notamment de la résolubilité du système (24.4) est effectuée par G. Mandjavidze [1].

Proposons un procédé dont la réalisation n'exige pas la recherche des fonctions $\sigma_k(t)$. Nous chercherons une solution, bornée en $m$ extrémités quelconques. L'équation s'avère dans ce cas toujours résoluble (l'indice étant nul) et la solution dépendra des constantes $C_k$. Exigeons maintenant en outre qu'aux extrémités restantes la solution soit absolument bornée. Nous parviendrons à un système d'équations équivalent au système (24.4), donc nécessairement résoluble.

Des équations régulières sont obtenues pour le problème mixte quand est connue soit la fonction de Schwarz (S. Mikhline [4]), soit la fonction réalisant une application conforme (D. Sherman [3]). Dans le dernier cas la solution de l'équation se construit sous forme explicite si la fonction de l'application est rationnelle.

Abordons en dernier lieu les problèmes mixtes que l'on rencontre dans la théorie de la flexion des lames. Bien entendu, le cas d'une lame encastrée sur certaines parties de la frontière et libre sur d'autres s'inscrit tout à fait dans la classe des problèmes mixtes envisagés précédemment (cf. les conditions (15.14) et (15.15)). C'est pourquoi nous ne considérerons que les problèmes où certains segments du contour seront appuyés, alors que les autres encastrés ou libres (ou les deux simultanément).

Le problème de la flexion d'une plaque pour des conditions aux limites de type mixte (combinaison d'appui, d'encastrement et de bords libres) dans sa forme la plus générale est étudié par A. Kalandia [1], qui réalise d'abord une transformation des conditions aux limites et, après avoir représenté les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ comme (19.2) et (19.3), parvient à un système d'équations intégrales singulières pour les parties réelle et imaginaire de la fonction auxiliaire. L'auteur a étudié ce système (en s'appuyant sur la théorie générale de N. Vekua [1]), démontré sa résolubilité et établi le caractère du comportement de sa solution aux points de changement de conditions aux limites.

Dans le cas où la plaque n'a pas de bords libres, l'auteur a réussi à simplifier les résultats en ramenant le système d'équations singulières à un système d'équations régulières.

Dans deux de ses articles [16, 17], D. Sherman fait l'étude de problèmes relatifs à la flexion d'une plaque circulaire. Il suppose dans le premier article, que la plaque est encastrée sur l'un des demi-cercles et appuyée sur l'autre, alors que dans le second article l'un de ses demi-cercles est libre et l'autre appuyé. Dans les deux cas il obtient d'emblée des équations intégrales singulières qui se résolvent par développement de la fonction recherchée en série. Les systèmes d'équations algébriques obtenus étaient entièrement réguliers. Si les arcs diffèrent d'un demi-cercle, il est recommandé d'opérer un changement de variables dans l'équation intégrale moyennant une transformation homographique affine.

## § 25. Problèmes de la théorie de l'élasticité pour des corps délimités par des contours réguliers par morceaux

Abordons la résolution des problèmes plans de la théorie de l'élasticité pour des domaines présentant des points anguleux, en d'autres termes pour des domaines, délimités par des contours réguliers par morceaux. Nous supposerons que les angles entre les tangentes sont

différents de zéro. Envisageons tout d'abord la question de la résolubilité des problèmes et la nature des singularités présentes dans les solutions. Cette question est étudiée aussi bien des positions générales de la théorie des équations elliptiques pour les domaines présentant des points anguleux (cf. G. Eskine [1], V. Kondratiev [1]) que pour les problèmes de la théorie de l'élasticité (cf. I. Vorovitch [1], G. Gontcharova [1]). On a établi que ces problèmes sont normalement résolubles *).

V. Kondratiev a montré dans [1] que la solution au voisinage du point anguleux se présente sous la forme d'une série asymptotique et d'une fonction indéfiniment dérivable. Les termes de cette série comprennent des solutions spéciales de problèmes aux limites homogènes concernant un domaine « canonique », en d'autres termes un coin avec le même angle d'ouverture. Ces solutions (cf. § 17) dépendent uniquement des caractéristiques locales et de la forme des conditions aux limites, tandis que leur structure est définie indépendamment de la solution du problème aux limites. Les grandeurs des coefficients intervenant dans les termes de la série dépendent, elles, de la solution du problème global.

Analysons de près les procédés permettant de déterminer ces coefficients. En nous appuyant sur le travail de M. Stern *[1] conduisons les raisonnements sur l'exemple du problème concernant un corps qui présente une coupure émergeant par l'une de ses extrémités sur la surface extérieure. Supposons qu'au voisinage du sommet on peut admettre la coupure rectiligne. En vertu de (17.13), les premiers termes des développements mentionnés peuvent être représentés sous la forme

$$\begin{aligned}
U_r &= \frac{1}{4\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\left\{\left[(2k-1)\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right]K_{\mathrm{I}}-\right.\\
&\qquad\left.-\left[(2k-1)\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2}\right]K_{\mathrm{II}}\right\}+o\left(r^{1/2}\right),\\
U_\theta &= \frac{1}{4\mu}\left(\frac{r}{2\pi}\right)^{1/2}\left\{\left[-(2k+1)\sin\frac{\theta}{2}+\sin\frac{3\theta}{2}\right]K_{\mathrm{I}}-\right.\\
&\qquad\left.-\left[(2k+1)\cos\frac{\theta}{2}-3\cos\frac{3\theta}{2}\right]K_{\mathrm{II}}\right\}+o\left(r^{1/2}\right),\\
\sigma_r &= \frac{1}{4\,(2\pi r)^{1/2}}\left\{\left(5\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{3\theta}{2}\right)K_{\mathrm{I}}-\right.\\
&\qquad\left.-\left(5\sin\frac{\theta}{2}-3\sin\frac{3\theta}{2}\right)K_{\mathrm{II}}\right\}+o\left(r^{-1/2}\right),
\end{aligned} \tag{25.1}$$

*) C'est-à-dire résolubles lorsque sont réalisées certaines conditions (la condition d'équilibre d'un corps limité, par exemple).

$$\sigma_\theta = \frac{1}{(4\pi r)^{1/2}} \left\{ \left(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}\right) K_{\rm I} - \right.$$
$$\left. - \left(3\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}\right) K_{\rm II} \right\} + o(r^{-1/2}),$$
$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{4(2\pi r)^{1/2}} \left\{ \left(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\right) K_{\rm I} + \right.$$
$$\left. + \left(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}\right) K_{\rm II} \right\} + o(r^{-1/2}),$$

où comme toujours $k = 3 - 4\nu$ en cas de déformation plane et $k = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ pour un état plan de contrainte. On a effectué un certain regroupement des termes dans (25.1) afin de donner aux résultats la forme des relations adoptées en mécanique de rupture fragile (cf. V. Parton, E. Morozov [1]), puisque

$$K_{\rm I} = \lim_{r\to 0} (2\pi r)^{1/2} \sigma_\theta \,|_{\theta=0}, \quad K_{\rm II} = \lim_{r\to 0} (2\pi r)^{1/2} \tau_{r\theta} \,|_{\theta=0}.$$

Introduisons maintenant en considération les déplacements $\hat{U}$ et les contraines $\hat{\sigma}$ qui leur correspondent:

$$\hat{U}_r = \frac{1}{2(2\pi r)^{1/2}(1+k)} \left\{ \left[ (2k+1)\cos\frac{3\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2} \right] c_1 + \right.$$
$$\left. + \left[ (2k+1)\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\},$$
$$\hat{U}_\theta = \frac{1}{2(2\pi r)^{1/2}(1+k)} \left\{ \left[ -(2k-1)\sin\frac{3\theta}{2} + 3\sin\frac{\theta}{2} \right] c_1 + \right.$$
$$\left. + \left[ (2k+1)\cos\frac{3\theta}{2} - \cos\frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\},$$
$$\hat{\sigma}_\theta = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{1/2}(1+k)} \left\{ \left[ \cos\frac{3\theta}{2} + 3\cos\frac{\theta}{2} \right] c_1 + \right. \tag{25.2}$$
$$\left. + \left[ \sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\},$$
$$\hat{\tau}_{r\theta} = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{1/2}(1+k)} \left\{ 3\left[ \sin\frac{3\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2} \right] c_1 - \right.$$
$$\left. - \left[ \cos\frac{3\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\},$$
$$\hat{\sigma}_r = -\frac{\mu}{2(2\pi r^3)^{1/2}(1+k)} \left\{ \left[ 7\cos\frac{3\theta}{2} - 3\cos\frac{\theta}{2} \right] c_1 + \right.$$
$$\left. + \left[ 7\sin\frac{3\theta}{2} - \sin\frac{\theta}{2} \right] c_2 \right\},$$

où $c_1$ et $c_2$ sont des constantes arbitraires.

Sur la partie rectiligne de la coupure ces solutions vérifient des conditions aux limites homogènes (en contraintes) (pour $\theta = \pi$).

Appliquons à présent la formule de Betti (14.15) dans sa variante bidimensionnelle à la solution véritable et à la solution auxiliaire (25.2) pour le domaine hachuré de la figure 13. Ici le contour $C_\varepsilon$

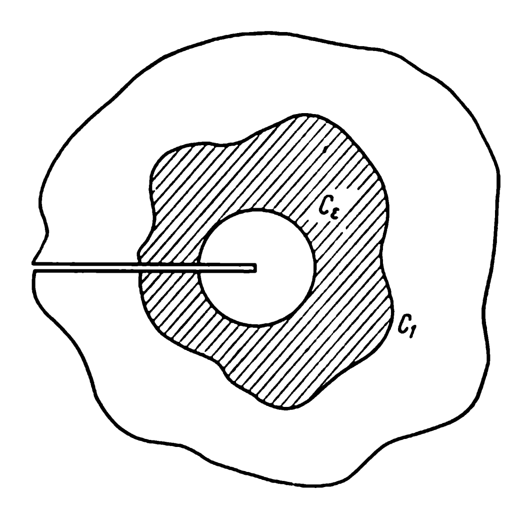



Fig. 13. Contour auxiliaire dans le domaine présentant une coupure.

est une circonférence de rayon ε, centrée à l'extrémité de la coupure, et $C_1$ un contour assez arbitraire, disposé à une certaine distance de l'extrémité de la coupure. Nous obtenons l'égalité

$$I_\varepsilon = -\int_{C_\varepsilon} (UT_\nu\hat{U} - \hat{U}T_\nu U)\,dS = \int_{-\pi}^{\pi} (\hat{\sigma}_r U_r - \hat{\tau}_{r\theta} U_\theta - \sigma_r \hat{U}_r + \\ + \tau_{r\theta}\hat{U}_\theta)\, r\, d\theta = \int_{C_1} (UT_\nu\hat{U} - \hat{U}T_\nu U)\,dS = I_{C_1}. \qquad (25.3)$$

La valeur limite de l'intégrale prise sur l'arc $C_\varepsilon$ se calcule sous forme explicite à partir des représentations (25.1) et (25.2):

$$I_\varepsilon = c_1 K_I + c_2 K_{II}. \qquad (25.4)$$

L'intégrale du second membre de (25.3) peut être calculée dans le cas où la solution est connue sur ce contour. Peut être admise comme telle la solution qui, tout en étant approchée, est toutefois suffisamment proche de la solution exacte à une certaine distance du point anguleux (dont on parlera plus bas).

Cette intégrale aussi est une forme linéaire par rapport aux constantes $c_1$ et $c_2$, autrement dit $T_{C_1} = c_1 A_1 + c_2 A_2$, où $A_1$ et $A_2$ sont déterminées par intégration numérique sur le contour $C_1$. De la

sorte nous obtenons

$$K_{\rm I} = A_1, \quad K_{\rm II} = A_2. \qquad (25.5)$$

Le procédé dont on parle a été utilisé par M. Stern, E. B. Becker, R. S. Dunham * [1] pour le cas, où d'un côté du point anguleux sont donnés les déplacements, et de l'autre, les contraintes.

Remarquons qu'il existe une méthode permettant de déterminer ces facteurs pour le cas général des problèmes aux limites elliptiques (V. Mazia et B. Plaménevski [1, 2]). On a obtenu pour ces facteurs des représentations explicites sous forme d'intégrales étendues au contour frontière comprenant les conditions aux limites et certaines solutions spéciales du problème aux limites homogène auxiliaire, qui dépendent uniquement de la configuration du domaine et de la nature des conditions aux limites. Ces solutions admettent comme termes dominants de leur comportement asymptotique les mêmes solutions (25.2) avec une singularité intégrable au point irrégulier. Cette méthode est particulièrement avantageuse dans le cas où il faut élaborer la solution pour un domaine soumis à différentes conditions aux limites. V. Dudnikov et N. Morozov [1] ont été les premiers à réaliser cette approche (N. Morozov [1] l'illustre de divers exemples).

Pour réaliser les méthodes dont il est question il faut disposer de solutions proches des solutions recherchées en dehors de la zone attenant immédiatement aux points anguleux. De telles solutions peuvent être cherchées par exemple pour des problèmes posés pour des contours réguliers et des conditions aux limites obtenues par prolongement continu des conditions initiales. La légitimité d'une telle substitution a été démontrée par S. Bélonossov [1] et S. Nazarov [1]. Il est montré dans le dernier travail qu'on observe dans la norme de l'espace $W_2^2$ une forte convergence de la solution pour un domaine régulier vers la solution pour le domaine présentant un point anguleux.

Notons que le problème de l'extraction directe des coefficients recherchés à partir de la solution trouvée pour un domaine régulier a été posé par V. Parton et P. Perline [2] pour le cas d'un corps présentant une coupure. Dans l'exemple envisagé dans ce travail le plan présentant une coupure était remplacé par un plan comportant une cavité assez mince. Dans les deux problèmes les contraintes étaient appliquées à l'infini et c'est pourquoi la question du transfert des conditions aux limites se résolvait automatiquement puisque le contour n'était pas sollicité par des charges extérieures. Le diagramme des contraintes sur le prolongement de la coupure, construit d'après la solution auxiliaire, permettait de déterminer la valeur du coefficient $K$ au moyen d'un raccordement régulier de la solution numérique avec la solution asymptotique connue. Le cas général d'une telle position est étudié dans l'article [1] de S. Nazarov. Les

coefficients intervenant dans les solutions asymptotiques sont trouvés indépendamment pour chacune des composantes des contraintes; toutefois, il doit avoir lieu entre eux certaines relations découlant de (8.31) ou de (8.33).

Abordons maintenant la question concernant la résolution directe, à l'aide des équations intégrales, des problèmes de l'élasticité pour les domaines présentant des points anguleux. Rappelons que L. Magnaradze [1, 2] a développé pour les problèmes plans de l'élasticité l'approche de J. Radon * [1], proposée pour la résolution des problèmes harmoniques. Dans les équations intégrales (il s'agit concrètement de la généralisation des équations de Muskhelishvili) envisagées dans ces travaux, les intégrales sont comprises au sens de Stiltjes. Il est établi que les équations interprétées de la sorte restent comme auparavant résolubles.

S. Bélonossov [1] établit les équations intégrales en réalisant au préalable une application conforme du domaine initial sur le demi-plan et appliquant la transformation de Laplace aux potentiels complexes. Les équations intégrales obtenues s'avèrent des équations intégrales de Fredholm lorsque le domaine est délimité par un contour régulier. Quand le contour est régulier par morceaux, elles appartiennent à la classe des équations à noyaux de Carleman. L'auteur a pu démontrer la résolubilité des équations obtenues. De nombreux exemples numériques sont présentés dans ce travail.

Notons que l'utilisation de telles ou telles représentations intégrales, par exemple des représentations (19.2) ou (19.3) pour un potentiel complexe, aurait conduit dans le cas de contours non réguliers aux équations intégrales de Sherman-Lauricella (19.5) en tous les points réguliers du contour, mais avec un autre facteur du terme hors intégrale aux points anguleux.

Si on étend formellement (sans justification mathématique rigoureuse) les schémas de calcul, valables pour le cas des contours réguliers, au cas des contours non réguliers, tout en exigeant la vérification des équations en tous les points sauf anguleux (ce qu'on obtient par discrétisation appropriée du contour et en considérant les points anguleux comme doubles), la question concernant la détermination de ces facteurs ne se pose plus. Comme ont montré les calculs concrets (un des exemples est donné au § 20), avec une discrétisation appropriée au voisinage du point anguleux on peut obtenir des résultats satisfaisants. Plus en détail cette question est considérée au § 37.

M. R. Barone et A. R. Robinson * [1] appliquent un procédé combiné original d'élaboration de l'équation intégrale. Plus précisément, deux équations sont utilisées (pour divers points). L'une est obtenue de la formule de Betti, en choisissant comme fonction vérifiant l'équation de Lamé la solution pour une force concentrée (cf. § 29). L'autre équation est posée de la même façon, mais seule-

ment à l'aide d'une fonction propre pour l'angle adéquat. Dans les deux équations les grandeurs recherchées sont les déplacements (il s'agit du deuxième problème fondamental). La première équation est valable dans tous les points sauf au voisinage des points anguleux, la seconde dans les domaines restants.

Dans l'ouvrage de Yu. Chaliukhine [1] est proposée la méthode de résolution de l'équation de Muskhelishvili spécialement pour le cas où le contour frontière est polygonal. Sur chacun des segments l'auteur donne la fonction $\varphi(t)$ sous forme de polynôme, ce qui permet d'obtenir sous forme explicite les expressions de tous les termes intégraux de l'équation et, par conséquent, de passer à un système d'équations algébriques, tout en exigeant que les premier et second membres coïncident en un nombre correspondant de points intérieurs. Les calculs effectués ont montré que l'algorithme est stable.

## § 26. Méthode de conjugaison

Les résultats énoncés précédemment montrent que pratiquement dans tous les cas les problèmes fondamentaux concernant des corps présentant des coupures, ainsi que les problèmes mixtes peuvent être ramenés à des équations intégrales singulières. Pour la résolution de ces dernières on a parfois recours au problème aux limites de Riemann.

Il est intéressant de considérer un procédé permettant de ramener directement les problèmes des classes mentionnées (dans certains cas particuliers) au problème aux limites de Riemann. Cette méthode est connue dans la littérature sous le nom de *méthode de conjugaison*. Soit $D^+$ le demi-plan supérieur, $D^-$ le demi-plan inférieur. Soit $D^+$ une fonction analytique $\Phi(z)$; déterminons dans $D^-$ la fonction $\overline{\Phi}(z)$:

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})} \quad (z\in D^+). \tag{26.1}$$

Nous aurons besoin pour la suite de quelques relations existant entre les valeurs limites des fonctions $\Phi(z)$ et $\overline{\Phi}(z)$ $(z\to t,\ z\in D^+,\ \bar{z}\in D^-)$:

$$\overline{\Phi}^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}, \quad \overline{\Phi^-(t)}=\Phi^+(t). \tag{26.2}$$

Il découle de ces relations que si, en particulier, $\operatorname{Im}\Phi^+(t)=0$ sur une portion quelconque de l'axe réel, le prolongement de la fonction par conjugaison est analytique.

Considérons le problème de la théorie de l'élasticité pour le demi-plan $D^-$. Supposons valables pour les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$

les représentations suivantes *):

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \Psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi}\frac{1}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \tag{26.3}$$

où $X$ et $Y$ sont les projections du vecteur résultant sur les axes $x$ et $y$. Prolongeons les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$ par conjugaison dans le demi-plan $D^+$ supérieur, autrement dit introduisons en considération les fonctions $\overline{\Phi}(z)$ et $\overline{\Psi}(z)$. Déterminons dans le domaine $D^+$ la fonction $\Phi_1(z)$:

$$\Phi_1(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi}'(z) - \overline{\Psi}(z) \quad (z \in D^+). \tag{26.4}$$

En portant dans cette même formule le point $\bar{z}$ ($\bar{z} \in D^-$) et prenant la conjuguée des deux membres, nous obtenons, compte tenu de (26.1), une nouvelle représentation:

$$\overline{\Phi}_1(z) = -\Phi(z) - z\Phi'(z) - \Psi(z). \tag{26.5}$$

La relation (26.5) permet d'exprimer la fonction $\Psi(z)$ par deux fonctions $\Phi(z)$ et $\overline{\Phi}_1(z)$, dont la première est analytique dans le domaine $D^-$, et la seconde, dans le domaine $D^+$. Par conséquent, l'état déformé de contrainte dans le domaine $D^-$ peut être représenté par deux fonctions (avec différents domaines d'analyticité).

Ecrivons l'expression de la combinaison des contraintes $\sigma_y - i\tau_{xy}$ qu'on obtient à partir des formules (15.9) en remplaçant la fonction $\Psi(z)$ par $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ conformément à (26.5):

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + (z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)} - \Phi_1(\bar{z}). \tag{26.6}$$

Supposons que la fonction $\Phi(z)$ admet en presque tous les points de l'axe réel les valeurs limites $\Phi^-(t)$, à l'exception de quelques points, auxquels néanmoins on a $\lim\limits_{z\to t} y\overline{\Phi'(z)} = 0$. Réalisant le passage à la limite dans la formule (26.6) vers les points de l'axe réel et omettant l'indice (dorénavant inutile) de la fonction $\Phi_1(z)$ **), nous aboutissons au problème aux limites de Riemann

$$\Phi^-(t) - \Phi^+(t) = \sigma_y - i\tau_{xy} = f(t), \tag{26.7}$$

où $f(t)$ est une fonction donnée.

Ainsi donc, la solution du deuxième problème fondamental pour le demi-plan (si (26.3) a lieu) se représente d'emblée par une inté-

---

*) Voir le § 15 et en particulier les restrictions imposées au comportement des contraintes à l'infini.

**) Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Phi_1(z)$ sont considérées par la suite comme les valeurs correspondantes dans $D^-$ et $D^+$ d'une même fonction, analytique par morceaux, notée $\Phi(z)$.

grale de type Cauchy

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{t-z}\,dt. \qquad (26.8)$$

Passons à la considération du premier problème fondamental. Différentions la condition aux limites pour les déplacements (15.5) dans le sens de l'axe $x$:

$$\varkappa\Phi(z)-\overline{\Phi(z)}-z\overline{\Phi'(z)}-\overline{\Psi(z)}=2\mu(u'+iv')=f(t). \qquad (26.9)$$

Puis, ayant encore recours à la représentation (26.5), nous obtenons

$$2\mu(u'+iv')=\varkappa\Phi(z)+(\bar z-z)\overline{\Phi'(z)}+\Phi_1(z). \qquad (26.10)$$

Réalisant le passage à la limite vers les points de l'axe réel nous aboutissons au problème aux limites de Riemann:

$$\varkappa\Phi^-(t)+\Phi^+(t)=f(t). \qquad (26.11)$$

La solution du problème aux limites (26.11) est trouvée sous forme explicite. Pour cela il convient de passer à une fonction auxiliaire $\Omega(z)$, analytique par morceaux, qu'on définit de la façon suivante:

$$\Omega(z)=\Phi(z)\quad(y>0),\qquad \Omega(z)=-\varkappa\Phi(z)\quad(y<0).$$

Dans ce cas la fonction $\Omega(z)$ est tirée du problème aux limites:

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=f(t)$$

dont la solution se représente également sous la forme (26.8).

Une combinaison des conditions (26.7) et (26.11) permet d'obtenir le problème aux limites dans le cas d'un problème mixte de la théorie de l'élasticité. Il est clair que dans ce cas les coefficients seront discontinus. Les questions relatives à l'application de cette méthode pour la résolution des problèmes de contact sont considérées par N. Muskhelishvili [3], qui étudie également divers cas de conditions aux limites (étampes lisses, présence de frottement entre l'étampe et le corps déformé), ainsi que le cas de déformation simultanée de deux demi-plans élastiques avec différents coefficients $\varkappa$ et $\mu$.

Passons au problème de l'élasticité pour un plan présentant des coupures rectilignes $L=L_1+L_2+\ldots+L_m$ disposées sur une même droite qu'on suppose être l'axe réel. Les fonctions $\Phi(z)$ et $\Psi(z)$, analytiques dans tout le plan, excepté les coupures, se représentent par

$$\Phi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right),\quad \Psi(z)=\frac{\varkappa(X-iY)}{2\pi(1+\varkappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right), \qquad (26.12)$$

$X$ et $Y$ ayant la même signification que dans (26.3) (par souci de simplicité on admet les contraintes nulles à l'infini).

Définissons sur tout le plan, excepté les coupures, les fonctions $\overline{\Phi}(z)$ et $\overline{\Psi}(z)$ et introduisons une nouvelle fonction, $\Omega(z)$, posant

$$\Omega(z) = \overline{\Phi}(z) + z\overline{\Phi}'(z) + \overline{\Psi}(z). \tag{26.13}$$

La fonction $\Omega(z)$ sera analytique sur tout le plan excepté les coupures. La combinaison des contraintes $\sigma_y - i\tau_{xy}$ exprimée au moyen de $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ s'écrit

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + (z - \bar{z})\,\overline{\Phi}'(\bar{z}) + \Omega(\bar{z}). \tag{26.14}$$

Réalisant dans (26.14) le passage à la limite vers les points des coupures (du côté du demi-plan supérieur et du demi-plan inférieur) nous sommes conduits au problème aux limites de Riemann pour $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$:

$$\Phi^+(t) + \Omega^-(t) = p(t), \quad \Phi^-(t) + \Omega^+(t) = q(t). \tag{26.15}$$

Les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont supposées données. Pour établir le système (26.15) on pose comme auparavant que $\lim\limits_{q \to 0} \overline{y\Phi'(\bar{z})} = 0$.

Le système (26.15) se ramène à deux problèmes aux limites de Riemann pour les fonctions $\Phi(z) + \Omega(z)$ et $\Phi(z) - \Omega(z)$:

$$[\Phi + \Omega]^+ + [\Phi + \Omega]^- = p(t) + q(t), \tag{26.16}$$

$$[\Phi - \Omega]^+ - [\Phi - \Omega]^- = p(t) - q(t). \tag{26.17}$$

Les problèmes (26.16) et (26.17) se résolvent de façon élémentaire. Remarquons, par ailleurs, que pratiquement tous les résultats, obtenus pour le cas d'un demi-plan ou d'un plan présentant des coupures rectilignes, s'étendent au cas de l'intérieur ou de l'extérieur d'un cercle, ainsi qu'au cas d'un plan présentant des coupures, disposées le long d'arcs d'une même circonférence (cf. I. Kartsivadze [1]).

Citons l'article de I. Prousov [1] consacré au problème d'un plan constitué de deux demi-plans soudés entre eux, qui admettent des constantes différentes et comportent des trous arbitraires, disposés strictement à l'intérieur de chaque domaine. Moyennant la méthode de conjugaison l'auteur ramène le problème à un problème auxiliaire pour le domaine global.

## § 27. Méthode de conjugaison (suite)

Considérons quelques questions spécifiques relatives à un problème plan pour lequel la méthode de conjugaison s'est avérée efficace.

Soit un plan élastique illimité affaibli par un système doublement périodique de coupures, parallèles à l'axe réel (cf. V. Parton [2] et B. Koudriavtsev, V. Parton [2]). Dans la classe des problèmes

doublement périodiques de l'élasticité on a surtout étudié les problèmes concernant l'équilibre des plaques et des enveloppes comportant des trous circulaires ou elliptiques (plaques et enveloppes perforées). Mais pour les applications (en mécanique de rupture par exemple) ce sont les problèmes analogues pour des coupures rectilignes ou en forme d'arcs (cf. V. Parton [1]), qui présentent de l'intérêt. Supposons que le parallélogramme de périodes ait la forme d'un

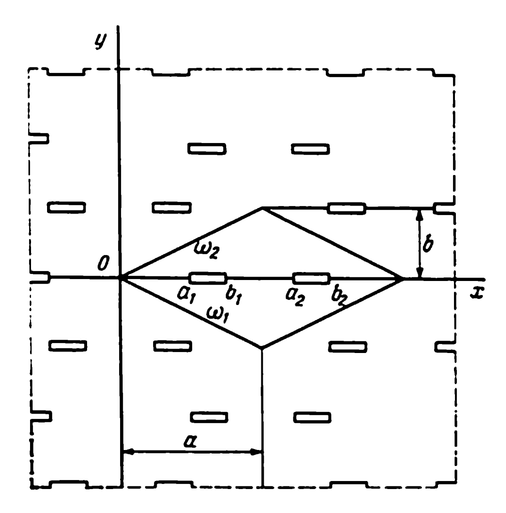



Fig. 14. Demi-plan présentant un système de coupures doublement périodique.

losange et que les périodes $\omega_1$ et $\omega_2$ soient des conjugués complexes. A l'intérieur du parallélogramme de périodes deux coupures $L_1$ et $L_2$ de même longueur sont disposées suivant la diagonale, symétriquement par rapport au centre du losange (fig. 14). Soient $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$ les coordonnées des extrémités de ces coupures:

$$a_2 = \omega_1 + \omega_2 - b_1, \qquad b_2 = \omega_1 + \omega_2 - a_1, \qquad (27.1)$$
$$\omega_1 = a - ib, \qquad \omega_2 = a + ib.$$

Nous supposerons donnée sur les bords des coupures la charge normale $p(t)$ et les contraintes tangentielles nulles, en vertu de quoi l'état de contrainte du plan sera symétrique par rapport aux axes $x$, $y$.

Conformément à l'approche générale de la résolution des problèmes élastiques dans le cas d'un plan présentant des coupures par la méthode de conjugaison (§ 26), il convient de déterminer deux fonctions analytiques, $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$, vérifiant certaines conditions complémentaires qui assurent le caractère doublement périodique de l'état de contrainte. Il découle des conditions de la double périodicité des composantes des contraintes que $\Phi(z)$ est une fonction

doublement périodique et que $\Omega(z)$ doit satisfaire aux conditions

$$\begin{aligned}\Omega(z+\omega_1)-\Omega(z)&=(\omega_1-\overline{\omega_1})\overline{\Phi'(z)},\\ \Omega(z+\omega_2)-\Omega(z)&=(\omega_2-\overline{\omega_2})\overline{\Phi'(z)}.\end{aligned}\tag{27.2}$$

Il découle d'autre part des conditions de la symétrie réflexion-miroir par rapport aux axes $x$, $y$ que

$$\begin{aligned}\Phi(z)=\overline{\Phi(\bar z)},\quad \Omega(z)=\overline{\Omega(\bar z)},\\ \Phi(z)=\Phi(-z),\quad \Omega(z)=\Omega(-z).\end{aligned}\tag{27.3}$$

En vertu de (26.16) et (26.17) nous obtenons

$$[\Phi(t)+\Omega(t)]^+ + [\Phi(t)+\Omega(t)]^- = 2p(t) \quad \text{sur } L, \tag{27.4}$$

$$[\Phi(t)-\Omega(t)]^+ - [\Phi(t)-\Omega(t)]^- = 0 \quad \text{sur } L. \tag{27.5}$$

Ici $L$ est la droite des sauts dans le parallélogramme de périodes, constituée des segments $L_1$ et $L_2$ de l'axe réel.

Utilisons pour la résolution des problèmes aux limites (27.4) et (27.5) la représentation des fonctions doublement périodiques sous forme d'intégrales de type Cauchy avec un noyau doublement périodique (cf. L. Tchibrikova [1]). Considérons la fonction paire doublement périodique

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\wp'(t)\,f(t)\,dt}{\wp(t)-\wp(z)}. \tag{27.6}$$

En tenant compte des relations connues pour les fonctions de Weierstrass (cf. A. Zhuravski [1]), on peut montrer que les valeurs limites de l'intégrale (27.6), lorsque le point $z$ tend vers le contour $L$ de gauche et de droite, sont liées par des égalités analogues aux formules (2.9):

$$\begin{aligned}F^+(\tau)-F^-(\tau)&=f(\tau),\\ F^+(\tau)+F^-(\tau)&=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\wp'(t)\,f(t)\,dt}{\wp(t)-\wp(\tau)}.\end{aligned}\tag{27.7}$$

Juste de la même façon on peut établir que pour la fonction impaire doublement périodique

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\wp'(z)\int_L \frac{f_1(t)\,dt}{\wp(t)-\wp(z)} \tag{27.6'}$$

sont vraies les relations

$$\begin{aligned}F_1^+(\tau)-F_1^-(\tau)&=f_1(\tau),\\ F_1^+(\tau)+F_1^-(\tau)&=\frac{1}{\pi i}\wp'(\tau)\int_L \frac{f_1(t)\,dt}{\wp(t)-\wp(\tau)}\end{aligned}\tag{27.7'}$$

très utiles pour les applications. Nous rechercherons les fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sous la forme

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,\rho'(t)\,dt}{\rho(t)-\rho(z)}, \tag{27.8}$$

$$\Omega(z)=\Phi(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\,k(z,t)\,dt. \tag{27.9}$$

Ici

$$k(z,t)=(z-t)\,\rho(z-t)-\zeta(z-t)-(z+t)\,\rho(z+t)+\\ +\zeta(z+t)-\rho_1(z-t)+\rho_1(z+t)-2\zeta(t),$$

où la fonction $\rho_1(z)$ est définie par la formule (20.3). Les fonctions $\rho_1(z)$ et $\rho(z)$ vérifient les relations

$$\rho_1(z+\omega_1)-\rho_1(z)=\bar{\omega}_1\rho(z)+\gamma_1,$$
$$\rho_1(z+\omega_2)-\rho_1(z)=\bar{\omega}_2\rho(z)+\gamma_2$$

(cf. E. Grigoliuk et L. Filchtinski [1]). En tenant compte de ces relations, il est facile d'établir que pour la fonction $k(z,t)=$ $=k(-z,t)$ on a les égalités:

$$k(z+\omega_1,t)=k(z,t)+(\omega_1-\bar{\omega}_1)\,\rho'(z)\frac{\rho'(t)}{[\rho(t)-\rho(z)]^2},$$
$$k(z+\omega_2,t)=k(z,t)+(\omega_2-\bar{\omega}_2)\,\rho'(z)\frac{\rho'(t)}{[\rho(t)-\rho(z)]^2}.$$

Donc, les conditions (27.4) et (27.5) auxquelles doit satisfaire la fonction $\Omega(z)$ sont remplies. Il est aisé de voir que la fonction $k(z,t)$ ne possède pas de singularités aux points $z=t$, donc l'intégrale présente dans (27.9) peut être prolongée par continuité à travers le contour $L$.

En portant (27.8) et (27.9) dans (27.4) et (27.5) nous nous assurons que la condition (27.5) est vérifiée identiquement et que l'égalité (27.4) prend la forme

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=p(t)-\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)\,k(t,\tau)\,d\tau \quad \text{sur } L. \tag{27.10}$$

Supposant connu le second membre de (27.10), nous rechercherons la solution du problème aux limites (27.10) dans la classe des fonctions paires doublement périodiques.

Considérons, en nous appuyant sur l'article de L. Tchibrikova [1], la fonction canonique du problème aux limites homogène (27.10):

$$X_0(z)=\frac{\sigma(z-A_1)\,\sigma(z-A_2)}{\sqrt{\sigma(z-a_1)\,\sigma(z-b_1)\,\sigma(z-a_2)\,\sigma(z-b_2)}},$$

où $\sigma(u)$ est la fonction sigma de Weierstrass, $A_1$ et $A_2$ des constantes réelles, n'appartenant pas à $L$ et vérifiant la relation $A_1 + A_2 = \omega_1 + \omega_2$. Il est aisé de voir que $X_0(z)$ est une fonction elliptique paire, qui admet dans le parallélogramme de périodes deux zéros simples aux points $A_1$ et $A_2$. Pour les valeurs limites de $X_0(z)$ sur le contour $L$, on a l'égalité $X_0^+(t) + X_0^-(t) = 0$.

Transformons l'expression de $X_0(z)$ en tenant compte de (27.1) et des formules suivantes (cf. A. Zhuravski [1]):

$$\rho(u) - \rho(v) = -\frac{\sigma(u+v)\,\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}, \quad \sigma(u+\omega_1) = -e^{-\delta_1\left(u+\frac{\omega_1}{2}\right)}\sigma(u),$$

$$\sigma(u+\omega_2) = -e^{-\delta_2\left(u+\frac{\omega_2}{2}\right)}\sigma_1(u), \quad \delta_1 = 2\zeta\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \quad \delta_2 = 2\zeta\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Nous obtenons

$$X_0(z) = \frac{\sigma^2(A_1)\, e^{1/2\,(2A_1 - a_1 - b_1)(\delta_1+\delta_2)}}{\sigma(a_1)\,\sigma(b_1)} \frac{[\rho(A_1) - \rho(z)]}{\sqrt{[\rho(a_1) - \rho(z)]\,[\rho(b_1) - \rho(z)]}}.$$

Posant $A_1 = 0$ et laissant de côté le facteur constant, on peut admettre que la fonction canonique du problème aux limites homogène (27.10) est de la forme

$$X(z) = \{[\rho(a_1) - \rho(z)]\,[\rho(b_1) - \rho(z)]\}^{-1/2}.$$

Les valeurs de $X(z)$ sur le bord supérieur de la coupure seront:

$$X^+(x) = i\,\{[\rho(a_1) - \rho(x)]\,[\rho(x) - \rho(b_1)]\}^{-1/2} \quad \text{pour } a_1 < x < b_1,$$

$$X^+(x) = -i\,\{[\rho(a_1) - \rho(x)]\,[\rho(x) - \rho(b_1)]\}^{-1/2} \quad \text{pour } a_2 < x < b_2.$$

A l'aide de la fonction canonique $X(z)$ nous trouvons la solution générale du problème homogène (27.10) pour la fonction paire doublement périodique $\Phi_0(z)$, qui vérifie la condition

$$\Phi_0(z) = \overline{\Phi_0(\bar{z})} \tag{27.3'}$$

et n'admet pas de pôles à l'intérieur du parallélogramme de périodes présentant la coupure $L$. Cette solution sera:

$$\Phi_0(z) = X(z)\,[\beta + \beta_1 \rho(z)]. \tag{27.11}$$

Ici $\beta$ et $\beta_1$ sont des constantes arbitraires. En vertu de la condition (27.3') et de l'égalité $\rho(z) = \overline{\rho(\bar{z})}$, les constantes $\beta$ et $\beta_1$ sont des grandeurs réelles.

A l'aide de la fonction canonique $X(z)$ nous obtenons (conformément au § 6) la condition aux limites découlant de (27.10):

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{p(t)}{X^+(t)} - \frac{1}{2\pi i}\frac{1}{X^+(t)} \int_L f(\tau)\, k(t, \tau)\, d\tau. \tag{27.12}$$

En vertu des formules (27.6) et (27.7) nous obtenons la solution du problème aux limites (27.12):

$$\Phi(z)=\Phi_*(z)-$$
$$-\frac{1}{2\pi i}X(z)\int_L \frac{\rho'(t)}{X^+(t)[\rho(t)-\rho(z)]}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L f(\tau)k(t,\tau)\,d\tau\right]dt. \quad (27.13)$$

Ici

$$\Phi_*(z)=\frac{1}{2\pi i}X(z)\int_L \frac{\rho(t)\rho'(t)\,dt}{X^+(t)[\rho(t)-\rho(z)]}+\frac{1}{2}\Phi_0(z), \quad (27.14)$$

et dans le cas d'une charge constante appliquée aux bords de la coupure,

$$\Phi_*(z)=\frac{p}{2}-\frac{p}{4}[\rho(a_1)+\rho(b_1)-2\rho(z)]X(z)+\frac{1}{2}\Phi_0(z). \quad (27.15)$$

D'après les expressions (27.6) à (27.8), les valeurs limites de $\Phi(z)$ adoptées à gauche et à droite de $L$ vérifient la relation $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=f(t)$, d'où, en y portant les valeurs limites (27.13), on tire

$$f(u)=[\Phi_*^+(u)-\Phi_*^-(u)]+$$
$$+\frac{1}{2\pi^2}X^+(u)\int_L \frac{\rho'(t)}{X^+(t)[\rho(t)-\rho(u)]}\left[\int_L f(\tau)k(t,\tau)\,d\tau\right]dt. \quad (27.16)$$

Dans le dernier terme du second membre, on peut, étant donné la continuité de $k(t,\tau)$, intervertir l'ordre d'intégration. Ceci nous conduit à une équation de Fredholm pour déterminer la fonction $f(t)$:

$$f(u)=[\Phi_*^+(u)-\Phi_*^-(u)]+\int_L f(\tau)K(u,\tau)\,d\tau. \quad (27.17)$$

Ici

$$K(u,\tau)=\frac{1}{2\pi^2}X^+(u)\int \frac{k(t,\tau)\rho'(t)\,dt}{X^+(t)[\rho(t)-\rho(u)]}.$$

Compte tenu des relations (27.8), (27.9) déterminons les composantes des contraintes sur l'axe réel:

$$(\sigma_y-i\tau_{xy})_{y=0}=2\Phi(x)+\frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)k(x,t)\,dt.$$

Pour trouver les constantes $\beta$ et $\beta_1$, considérons le vecteur résultant de toutes les forces appliquées le long d'un certain arc $AB$ réunissant deux points congruents, qui s'écrit ($\varphi'(z)=\Phi(z)$, $\omega'(z)=\Omega(z)$):

$$X+iY=-ig(z)|_A^B=-i[\varphi(z)+(z-\bar z)\overline{\Phi(z)}+\omega(\bar z)]_A^B.$$

Si la charge extérieure sur chacune des coupures est auto-équilibrée, le vecteur résultant de toutes les forces suivant l'arc $AB$ est nul, autrement dit

$$g(z+\omega_1)-g(z)=$$
$$=\varphi(z+\omega_1)-\varphi(z)+\omega(\bar z+\bar\omega_1)-\omega(\bar z)+(\omega_1-\bar\omega_1)\overline{\Phi(z)}=0,$$
$$g(z+\omega_2)-g(z)=$$
$$=\varphi(z+\omega_2)-\varphi(z)+\omega(\bar z+\bar\omega_2)-\omega(\bar z)+(\omega_2-\bar\omega_2)\overline{\Phi(z)}=0.$$

La fonction $\Phi(z)$ étant paire et doublement périodique, on a alors pour la fonction $\varphi(z)$ les relations $\varphi(z+\omega_1)-\varphi(z)=c_1$, $\varphi(z+\omega_2)-\varphi(z)=c_2$. Ici $c_1=2\varphi(\omega_1/2)$, $c_2=2\varphi(\omega_2/2)$. D'une manière analogue, pour la fonction $\omega(z)$ nous tirons des égalités (27.2) les conditions suivantes:

$$\omega(z+\omega_1)-\omega(z)=(\omega_1-\bar\omega_1)\Phi(z)+d_1,$$
$$\omega(z+\omega_2)-\omega(z)=(\omega_2-\bar\omega_2)\Phi(z)+d_2,$$
$$d_1=2\omega\left(\frac{\omega_1}{2}\right)-(\omega_1-\omega_2)\Phi\left(\frac{\omega_1}{2}\right),$$
$$d_2=2\omega\left(\frac{\omega_2}{2}\right)+(\omega_1-\omega_2)\Phi\left(\frac{\omega_2}{2}\right).$$

Le vecteur résultant de toutes les forces suivant l'arc $AB$ étant nul par hypothèse, on obtient, compte tenu des relations présentées, $c_1+d_1=0$, $c_2+d_2=0$. Substituant les valeurs des constantes $c_1$, $c_2$, $d_1$ et $d_2$, on trouve

$$\varphi\left(\frac{\omega_1}{2}\right)+\omega\left(\frac{\omega_1}{2}\right)-\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\Phi\left(\frac{\omega_1}{2}\right)=0,$$
$$\varphi\left(\frac{\omega_2}{2}\right)+\omega\left(\frac{\omega_2}{2}\right)+\frac{1}{2}(\omega_1-\omega_2)\Phi\left(\frac{\omega_2}{2}\right)=0.$$

Par conséquent, les constantes $\beta$ et $\beta_1$ doivent être choisies de manière à ce que ces égalités soient vérifiées.

Indiquons une manière quelque peu différente de résoudre les problèmes aux limites (27.4) et (27.5). Nous chercherons les fonctions $\Phi(z)$ et $\Omega(z)$ sous la forme

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\sum_{j=1}^{\infty}\Phi_j(z), \tag{27.18}$$

$$\Omega(z)=\Phi_0(z)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}\left\{\Phi_j(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L[\Phi_{j-1}^{+}(t)-\Phi_{j-1}^{-}(t)]\,k(z,t)\,dt\right\}, \tag{27.19}$$

où $\Phi_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) sont des fonctions paires doublement périodiques. De toute évidence, les conditions (27.4) et (27.5) seront remplies si les $\Phi_j$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) vérifient sur le contour $L$ les relations suivantes:

$$\Phi_0^+(t) + \Phi_0^-(t) = p(t) \quad (t \in L), \tag{27.20}$$

$$\Phi_j^+(t) + \Phi_j^-(t) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int_L [\Phi_{j-1}^+(\tau) - \Phi_{j-1}^-(\tau)]\, k(t, \tau)\, d\tau \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{27.21}$$

Nous avons donc une suite de problèmes aux limites pour les fonctions paires doublement périodiques $\Phi_j(z)$. Tirant les fonctions $\Phi_j(z)$ ($j = 0, 1, 2, \ldots$) de (27.20) et (27.21) nous obtenons dans le cas de charges constantes sur toute la longueur de la coupure:

$$\Phi_0(z) = \\ = \frac{p}{2\pi i} X(z) \int_L \frac{\rho'(t)\, dt}{X^+(t)\,[\rho(t) - \rho(z)]} + \frac{1}{2} X(z)\,[\beta^{(0)} + \beta_1^{(0)} \rho(z)], \tag{27.22}$$

$$\Phi_j(z) = -\frac{1}{2\pi i} X(z) \int_L \frac{\rho'(t)}{X^+(t)\,[\rho(t) - \rho(z)]} \times \\ \times \left\{\frac{1}{2\pi i} \int_L [\Phi_{j-1}^+(\tau) - \Phi_{j-1}^-(\tau)]\, k(t, \tau)\, d\tau\right\} dt + \\ + \frac{1}{2} X(z)\,[\beta^{(j)} + \beta_1^{(j)} \rho(z)] \quad (j = 1, 2, \ldots). \tag{27.23}$$

Les conditions d'égalité à zéro du vecteur résultant de toutes les forces s'écrivent:

$$\varphi_0\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \omega_0^*\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0, \quad \varphi_0\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \omega_0^*\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0, \tag{27.24}$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_j\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \omega_j^*\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\, \Phi_{j-1}\left(\frac{\omega_1}{2}\right), \\ &\varphi_j\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \omega_j^*\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = -\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)\, \Phi_{j-1}\left(\frac{\omega_2}{2}\right) \quad (j = 1, 2, \ldots). \end{aligned}\right\} \tag{27.25}$$

Ici

$$\varphi_j(z) = \int_0^z \Phi_j(z_1)\, dz_1 \quad (j = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\omega_0^*(z) = \varphi_0(z), \quad \omega_j^*(z) = \int_0^z \Omega_j(z_1)\, dz_1 \quad (j = 1, 2, \ldots), \tag{27.26}$$

$$\Omega_j(z) = \Phi_j(z) + \frac{1}{2\pi i} \int_L [\Phi_{j-1}^+(t) - \Phi_{j-1}^-(t)]\, k(z, t)\, dt.$$

Les relations (27.24) à (27.26) permettent de déterminer successivement les constantes $\beta^{(0)}$, $\beta_1^{(0)}$, $\beta^{(j)}$ et $\beta_1^{(j)}$.

Les résultats numériques proviennent de la solution approchée du problème, en ne gardant que les premiers termes dans les développements (27.18) et (27.19). Les contraintes normales sur l'axe réel pour $x < a_1$ sont dans ce cas:

$$\sigma_y \Big|_{\substack{y=0\\ x<a_1}} \approx 2\Phi_0(x) =$$
$$= p - \frac{p}{2}\frac{2\rho(x)-\rho(a_1)-\rho(b_1)}{\sqrt{[\rho(x)-\rho(a_1)][\rho(x)-\rho(b_1)]}} + \frac{\beta^{(0)}+\beta_1^{(0)}\rho(x)}{\sqrt{[\rho(x)-\rho(a_1)][\rho(x)-\rho(b_1)]}}. \quad (27.27)$$

On tire des conditions (27.24)

$$p\left[\frac{\omega_1}{2} - I_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\{p[\rho(a_1)+\rho(b_1)] + 2\beta^{(0)}\} I_0\left(\frac{\omega_1}{2}\right) + \beta_1^{(0)} I_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 0, \quad (27.28)$$
$$p\left[\frac{\omega_2}{2} - I_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right)\right] + \frac{1}{2}\{p[\rho(a_1)+\rho(b_1)] + 2\beta^{(0)}\} I_0\left(\frac{\omega_2}{2}\right) + \beta_1^{(0)} I_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 0.$$

Ici

$$I_0\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = I_0' + iI_0'' = \int_0^{1/2\omega_1} X(z)\,dz,$$
$$I_1\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = I_1' + iI_1'' = \int_0^{1/2\omega_1} \rho(z)X(z)\,dz,$$
$$I_0\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = I_0' - iI_0'', \quad I_1\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = I_1' - iI_1''.$$

Les valeurs des constantes $\beta^{(0)}$ et $\beta_1^{(0)}$ sont obtenues des équations (27.28):

$$\beta^{(0)} = -\frac{1}{2}p[\rho(a_1)+\rho(b_1)] + \frac{1}{2}p\frac{aI_1''+bI_1'}{I_0''I_1'-I_0'I_1''},$$
$$\beta_1^{(0)} = p - \frac{1}{2}p\frac{bI_0'+aI_0''}{I_0''I_1'-I_0'I_1''}. \quad (27.29)$$

Ici $a = \frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)$, $b = \frac{1}{2i}(\omega_2-\omega_1)$. En accord avec (27.27) nous trouvons la valeur approchée du coefficient de l'intensité des contraintes au point $a_1$:

$$K_I = \lim_{x\to a_1}\left[\sqrt{2\pi(a_1-x)}\,\sigma_y(x, 0)\,|_{x<a_1}\right] \approx$$
$$\approx -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{p[\rho(a_1)-\rho(b_1)] - 2\beta^{(0)} - 2\beta_1^{(0)}\rho(a_1)}{\sqrt{-\rho'(a_1)[\rho(a_1)-\rho(b_1)]}}. \quad (27.30)$$

L'application de la condition de rupture d'Irwin ($K_I = K_{Ic}$, $K_{Ic}$ est le coefficient critique de l'intensité des contraintes) permet de trouver le lien entre la longueur de la fissure et les charges appliquées.

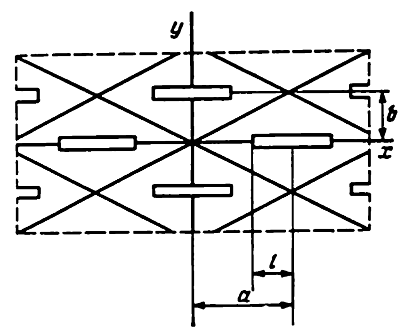



Fig. 15. Demi-plan présentant un système de coupures doublement périodique lorsque $b_1 = a_2$.

Les calculs réalisés avec la formule (27.30) ont été conduits pour le cas où $b_1 = a_2$ (le parallélogramme de périodes ne présente qu'une seule coupure; cf. fig. 15). La variation de la grandeur $p^* = p\sqrt{2\pi a}/K_{Ic}$ en fonction de la longueur relative de la coupure

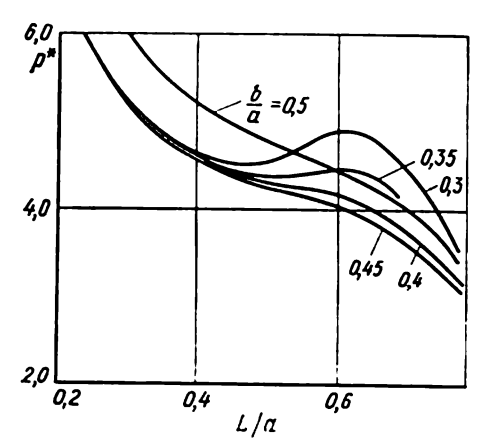



Fig. 16. Contrainte critique $p^*$ en fonction de la longueur de la fissure ($l/a$) pour différentes valeurs de $b/a$.

$l/a$ pour différentes valeurs de $b/a$ est représentée sur la figure 16. La solution examinée nous incite à penser que pour certaines valeurs du rapport $b/a$ le développement du système de fissures peut se stabiliser (il se produit leur consolidation réciproque) (cf. V. Parton [1], V. Parton, E. Morozov [1]).

CHAPITRE VI

# ÉQUATIONS INTÉGRALES DES PROBLÈMES FONDAMENTAUX SPATIAUX DE LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

## § 28. Potentiels élastiques généralisés

Exposons la théorie des potentiels élastiques généralisés en nous appuyant principalement sur la théorie classique des potentiels harmoniques.

Considérons l'espace rempli d'un milieu élastique dont les constantes de Lamé sont $\lambda$ et $\mu$. Supposons que le point $q$ $(y_1, y_2, y_3)$ est sollicité par la force $\varphi$ $[\varphi_1(q), \varphi_2(q), \varphi_3(q)]$. Dans ce cas, comme on a mentionné au § 14, les déplacements au point arbitraire $p$ $(x_1, x_2, x_3)$ s'expriment sous forme du produit de la matrice de Kelvin-Somigliana $\Gamma(p, q)$ par le vecteur $\varphi(q)$:

$$U(p) = \Gamma(p, q)\,\varphi(q). \tag{28.1}$$

Fixons au point $p$ un certain plan en donnant la direction de sa normale $\boldsymbol{n}$ $(n_1, n_2, n_3)$. Le vecteur des contraintes dans ce plan, correspondant au champ des déplacements (28.1), se représente alors comme le résultat de l'application de l'opérateur $T_{n(p)}$ (14.7) sur le déplacement (28.1). On a montré au § 14 que l'expression définitive du vecteur des contraintes se représente sous forme du produit de la matrice $\Gamma_1(p, q)$ (14.22) par le vecteur $\varphi(q)$. Explicitons les éléments de la matrice $\Gamma_1(p, q)$:

$$\Gamma_{1(kj)}(p, q) = -\left[m\delta_{kj} + 3n\frac{(x_k - y_k)(x_j - y_j)}{r^2}\right] \times \\ \times \frac{\sum_{l=1}^{3}(x_l - y_l)\,n_l(p)}{r^3} + m\left[n_k(p)\frac{(x_j - y_j)}{r^3} - n_j(p)\frac{(x_k - y_k)}{r^3}\right]. \tag{28.2}$$

Supposons que sur une certaine surface fermée de Liapounov *) $S$ sont données les forces $\varphi(q)$, tout en admettant d'autre part que

*) Une surface est dite *surface de Liapounov* si elle est soumise aux conditions suivantes: 1) il existe en chaque point de la surface $S$ une normale (un plan tangent); 2) il existe un nombre $d > 0$ tel que les droites, parallèles à la normale en un point $q$ quelconque de la surface $S$, coupent au plus une fois la partie $S_q$ de la surface $S$ située à l'intérieur d'une sphère de rayon $d$ centrée en $q$; 3) l'angle $\gamma(q, q') = (\overline{n_q}, \overline{n_{q'}})$ formé par les normales aux points $q$ et $q'$ vérifie l'équation suivante: $\gamma(q, q') < Ar^{\delta}$, où $r$ est la distance entre les points $q$ et $q'$, $A$ et $\delta$ des constantes et $0 < \delta \leqslant 1$.

la fonction $\varphi(q)$ est de classe H-L. Les déplacements globaux dans tout l'espace sont alors représentables sous forme de l'intégrale

$$U(p) = \int_S \Gamma(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q, \tag{28.3}$$

qu'on appelle *potentiel élastique généralisé de couche simple.* Il est évident que le potentiel (28.3) vérifie les équations de Lamé aussi bien dans le domaine $D^+$, que dans le domaine $D^-$. On peut parler des *valeurs limites du potentiel de couche simple* aussi bien *à l'intérieur* de la surface (du domaine $D^+$) qu'*à l'extérieur* (du domaine $D^-$) et également de la *valeur* dite *directe*, obtenue par substitution directe dans l'expression sous le signe somme des points de la surface $S$. Toutefois, moyennant les estimations appliquées pour des études analogues en théorie du potentiel harmonique de couche simple, on peut montrer que toutes ces trois valeurs coïncident entre elles (cf. par exemple L. Srétenski [1]). Par conséquent, *le potentiel élastique généralisé de couche simple représente de lui-même une fonction vecteur, continue dans tout l'espace.*

Supposons maintenant qu'avec chaque point $p$, situé dans une couche suffisamment mince englobant la surface $S$, est lié de façon univoque un point $q'$ de la surface $S$ de telle sorte que la normale à la surface menée au point $q'$ passe par ce point. Cela permet de définir de façon appropriée en tous les points intérieurs aux domaines $D^+$ et $D^-$ de cette couche la valeur du vecteur des contraintes. Ce vecteur se représente par l'intégrale

$$T_{n(q')}V(p) = \int_S \Gamma_1(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q; \tag{28.4}$$

$n(q')$ est la direction de la normale à la surface $S$ menée au point $q'$ correspondant au point $p$ dans le sens indiqué plus haut.

Utilisons la matrice $\Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)$ (14.28) pour la recherche du potentiel élastique généralisé, dit *potentiel de couche double de première espèce.* Ce potentiel se représente par l'intégrale

$$W_2^{\mathrm{I}}(p) = \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q. \tag{28.5}$$

De même que le potentiel de couche simple, ce potentiel représente, à l'extérieur et à l'intérieur de la surface, une fonction qui vérifie les équations de Lamé.

Remarquons qu'on peut attribuer à la matrice $\Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)$ une signification physique. Le produit de cette matrice par un certain vecteur $\varphi(q)$ représente le déplacement de l'espace tout entier, engendré par le moment concentré $\varphi(q)$ sollicitant au point $q$ le plan de normale $\boldsymbol{n}$.

La valeur directe du potentiel de couche double $W_2^I(p)$ n'a de sens que comme valeur principale (cf. § 7), puisque le dernier terme dans (28.2) — les éléments $\omega_{ij}$ — admet un pôle de second ordre.

Pour étudier les valeurs limites de déplacements représentables par le potentiel élastique généralisé de couche double de première espèce il faut tout d'abord considérer le cas élémentaire où la densité est constante. Désignons-la par $\varphi_0$ et faisons appel à la formule (14.27) en supposant que le vecteur $\varphi_0$ représente le déplacement de tout le corps et le point $p$ est situé dans le domaine $D^+$. Le premier terme du second membre de l'égalité s'annule, de sorte que nous obtenons l'expression

$$2\varphi_0 = -\int_S \Gamma_2^I(p, q)\, \varphi_0\, dS_q. \qquad (28.6)$$

Si par contre le point $p$ est pris dans le domaine $D^-$, nous sommes conduits à l'égalité

$$\int_S \Gamma_2^I(p, q)\, \varphi_0\, dS_q = 0. \qquad (28.7)$$

Passons au calcul de la valeur directe (singulière) du potentiel de couche double, quand le point $p$ est situé sur la surface $S$. Entourons ce point d'une sphère $\sigma_\varepsilon$ de petit rayon $\varepsilon$ et notons $\sigma_\varepsilon^+$ et $\sigma_\varepsilon^-$ les parties de sa surface disposées dans les domaines $D^+$ et $D^-$ respectivement. Notons $S_\varepsilon^*$ la partie de la surface $S$ qui est en dehors de la sphère $\sigma_\varepsilon$.

Il découle de ce qui précède, que l'intégrale étendue à la surface $S_\varepsilon^* + \sigma_\varepsilon^-$ est égale à $-2\varphi_0$, alors que celle étendue à la surface $S_\varepsilon^* + \sigma_\varepsilon^+$ est égale à zéro. En raison de la symétrie nous concluons qu'à la limite, quand le rayon $\varepsilon$ tend vers zéro, les intégrales prises sur $\sigma_\varepsilon^+$ et $\sigma_\varepsilon^-$ deviennent égales (au signe près). Par conséquent l'intégrale prise sur la surface $S_\varepsilon^*$ vaut à la limite $-\varphi_0$:

$$\int_S \Gamma_2^I(p, q)\, \varphi_0\, dS_q = -\varphi_0 \quad (p \in S). \qquad (28.8)$$

Rappelons que précisément de la sorte a été déterminée la valeur singulière de l'intégrale au § 7. Ce résultat représente le théorème de Gauss (sous forme généralisée).

On rencontre parfois en littérature les formules (28.6) à (28.8) écrites conventionnellement sous une autre forme ($E$ est la matrice unité):

$$\int_S \Gamma_2^I(p, q)\, dS_q = -2E \quad (p \in D^+), \qquad \int_S \Gamma_2^I(p, q)\, dS_q = 0 \quad (p \in D^-),$$

$$\int_S \Gamma_2^I(p, q)\, dS_q = -E \quad (p \in S).$$

Dans ce cas les intégrales sont interprétées comme intégrales de chaque élément de la matrice. Les résultats obtenus permettent d'établir les théorèmes limites pour le potentiel de couche double de première espèce. Transformons l'expression du potentiel

$$W_2^{\mathrm{I}}(p, q) = \int_S \mathbf{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,[\varphi(q) - \varphi(q')]\, dS_q + \\ + \varphi(q') \int_S \mathbf{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)\, dS_q, \qquad (28.9)$$

où $q'$ est un certain point fixe de la surface $S$. Lorsque le point $p$ tend (de l'intérieur ou de l'extérieur de la surface $S$) vers le point $q'$, le premier terme de (28.9) représente une fonction continue. Le comportement du second terme est étudié plus haut. On peut maintenant formuler le résultat obtenu sous forme du théorème suivant.

Notant $W_2^{\mathrm{I}+}(q')$ et $W_2^{\mathrm{I}-}(q')$ les valeurs limites du potentiel de couche double de l'intérieur et de l'extérieur respectivement, et $W_2^{\mathrm{I}}(q)$ la valeur directe (singulière), on a:

$$W_2^{\mathrm{I}+}(q') - W_2^{\mathrm{I}-}(q') = -2\varphi(q'), \qquad W_2^{\mathrm{I}+}(q') + W_2^{\mathrm{I}-}(q') = 2W_2^{\mathrm{I}}(q'). \qquad (28.10)$$

Les relations (28.10) peuvent être récrites sous une autre forme (équivalente):

$$W_2^{\mathrm{I}+}(q') = -\varphi(q') + W_2^{\mathrm{I}}(q'), \qquad W_2^{\mathrm{I}-}(q') = \varphi(q') + W_2^{\mathrm{I}}(q'). \qquad (28.10')$$

Remarquons que les résultats obtenus plus haut sont entièrement confirmés pour les potentiels engendrés par la matrice $\mathbf{\Gamma}_2^{\mathrm{II}}(p, q)$ (14.33), dits *potentiels de couche double de deuxième espèce*. Les égalités (28.6) à (28.8), (28.10), (28.10') sont vérifiées, puisque la matrice $\mathbf{\Gamma}_2^{\mathrm{II}}(p, q)$ diffère de la matrice $\mathbf{\Gamma}_2^{\mathrm{I}}(p, q)$ par des termes dont l'intégrale s'annule. Par analogie nous noterons ce potentiel $W_2^{\mathrm{II}}(p, q)$.

Considérons encore un potentiel, introduit par H. Weyl [1] et dit *potentiel d'antenne* *), dans lequel le noyau est constitué par la solution de troisième espèce $M(p, q)$ (14.36):

$$A(p, q) = \frac{1}{2\pi} \int_S M(p, q)\, \varphi(q)\, dS_q. \qquad (28.11)$$

Le potentiel (28.11) représente une fonction continue à l'intérieur de la surface $S$ lorsque la densité $\varphi(q)$ est continue. En ce qui concerne la signification physique du potentiel d'antenne, il correspond à la solution du problème de la théorie de l'élasticité obtenue

*) Le potentiel est dit potentiel d'antenne, parce que la fonction $\frac{\partial v}{\partial x} = \ln(r + x) = \int \frac{dx}{r}$ où $v$ est déterminée conformément à (14.34), est le potentiel électrostatique créé par les charges, qui sont distribuées uniformément le long de la normale à la surface $S$ de l'antenne.

par superposition des solutions pour le demi-espèce sollicité à la surface par une force concentrée (solution de Boussinesq).

Passons à l'étude du comportement de l'opérateur des contraintes $T_n$ dû au potentiel de couche simple (28.3). Il est évident que la substitution directe des points de la surface $S$ dans (28.4) conduit à une intégrale que l'on doit interpréter comme singulière. Nous allons considérer les valeurs limites de l'opérateur des contraintes de l'intérieur et de l'extérieur, que nous désignerons respectivement par $T_n^+V$ et $T_n^-V$.

Transformons l'expression (28.4) en supposant que le point $p$ tend vers le point $q'$ de la surface

$$\lim_{p\to q'} T_{n(q')}V(p) =$$
$$= \lim_{p\to q}\left\{\int_S [\Gamma_1(p, q)+\Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)]\,\varphi(q)\,dS_q - \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q\right\}. \tag{28.12}$$

Introduisant un système local de coordonnées et faisant des estimations au fond analogues aux estimations effectuées pour le potentiel harmonique (cf. S. Sobolev [2]), on peut montrer que le premier terme varie de façon continue, quand le point $q$ traverse la surface en se mouvant suivant la normale à celle-ci. Le comportement du dernier terme a été étudié plus haut. On en conclut à l'existence de la *valeur directe* $T_nV(q')$ et des *valeurs limites de l'opérateur des contraintes* et elles sont liées entre elles par les relations

$$T_n^+V(q') - T_n^-V(q') = 2\varphi(q'), \quad T_n^+V(q') + T_n^-V(q') = 2T_nV(q'), \tag{28.13}$$

$$T_n^+V(q') = \varphi(q') + T_nV(q'), \quad T_n^-V(q') = -\varphi(q') + T_nV(q'). \tag{28.13'}$$

Des opérations analogues aux précédentes montrent que pour les valeurs limites (de l'intérieur) de l'opérateur des contraintes dû au potentiel d'antenne on a l'égalité

$$T_n^+A(q') = -\varphi(q') + \frac{1}{2\pi}\int_S T_nM(q', q)\,\varphi(q)\,dS_q. \tag{28.14}$$

Rapportons l'expression de la matrice même:

$$T_{n(q')}M(q', q) =$$
$$= -3\left\|\begin{matrix} \left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 & \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} \\ \frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_3} & \frac{\partial r}{\partial x_2}\frac{\partial r}{\partial x_3} & \left(\frac{\partial r}{\partial x_3}\right)^2 \end{matrix}\right\| \frac{d}{dn(q')}\frac{1}{r} + 3\frac{m}{n}E. \tag{28.15}$$

Abordons la question du comportement des valeurs limites $T_n^+W_2^I$ et $T_n^-W_2^I$ de l'opérateur de contraintes dû au potentiel de couche double. Comme en théorie du potentiel harmonique, on obtient ici également seules quelques conditions suffisantes d'existence de ces valeurs limites. On a, par exemple, l'analogue suivant du théorème de Liapounov, dit *théorème de Liapounov-Taubert.*

Supposons que la densité du potentiel de couche double de première espèce est telle qu'il existe une valeur limite de l'opérateur $T_nW_2^I$ d'un côté de la surface ; donc *il existe une valeur limite de l'opérateur $T_nW_2^I$ de l'autre côté de la surface également et ces valeurs limites coïncident.* Pour démontrer cela, admettons qu'il existe une valeur limite de l'opérateur $T_n^+W_2^I$, que nous notons par raison de commodité $F(q)$. Ceci signifie qu'il existe dans le domaine $D^+$ une fonction $U_1(p)$ vérifiant les équations de Lamé pour laquelle existe une valeur limite de l'opérateur $T_n^+$, égale à $F(q)$. Désignons la valeur de cette fonction sur la surface par $U_1(q)$ et formons le potentiel de couche double

$$W_2^I(p)=W_2^I(p,\ U_1)=\int_S \Gamma_2^I(p,\ q)\,U_1(q)\,dS_q.$$

Introduisons maintenant une nouvelle fonction, $w(p)$, qu'on détermine dans le domaine $D^+$ par la formule $w(p)=U_1(p)-\frac{1}{2}W_2^I(p)$, et dans le domaine $D^-$ par la formule $w=-\frac{1}{2}W_2^I(p)$. Cette nouvelle fonction sera continue dans tout l'espace en vertu de la propriété (28.10).

Remarquons que la procédure de recherche de la fonction $U_1(p)$ est la procédure de résolution du deuxième problème fondamental et elle est réalisée moyennant un potentiel de couche simple (cf. § 31). Pour le potentiel de couche simple comme nous l'avons démontré précédemment, la valeur limite de l'opérateur des contraintes existe. C'est pourquoi le déplacement $U_1(p)$ possède cette propriété et de plus cette valeur limite coïncide avec la fonction $F(q)$.

Reportons-nous maintenant à la formule de Betti (14.27) que nous écrivons sous la forme

$$U_1(p)=\frac{1}{2}\int_S \Gamma_2^I(p,\ q)\,U_1(q)\,dS_q-\frac{1}{2}\int_S \Gamma(p,\ q)\,F(q)\,dS_q=$$
$$=\frac{1}{2}W_2^I(p)-\frac{1}{2}\int_S \Gamma(p,\ q)\,F(q)\,dS_q\quad (p\in D^+).\qquad (28.16)$$

Donc, la fonction $w(p)$ (28.16) peut être représentée dans le domaine $D^+$ sous la forme d'un potentiel de couche simple

$$w(p)=-\frac{1}{2}\int_S \Gamma(p,\ q)\,F(q)\,dS_q.\qquad (28.17)$$

Il découle de (28.17) que dans le domaine $D^+$ la somme $w(p)+$ $+\frac{1}{2}\int_S \Gamma(p, q)\, F(q)\, dS_q$ s'annule. Mais d'après ce qu'on a démontré plus haut, la fonction $w(p)$ est continue. Le second terme est également continu puisqu'il représente un potentiel de couche simple. Par conséquent, cette somme devient identiquement nulle dans le domaine $D^-$ aussi (à cause de l'unicité de la solution du problème $I^-$). Donc, nous aboutissons à la représentation suivante de la fonction $W_2^{\rm I}(p)$ dans tout l'espace:

$$W_2^{\rm I}(p)=2U_1(p)+\int_S \Gamma(p, q)\, F(q)\, dS_q \quad (p\in D^+), \qquad (28.18)$$

$$W_2^{\rm I}(p)=\int_S \Gamma(p, q)\, F(q)\, dS_q \qquad (p\in D^-). \qquad (28.18')$$

Les seconds membres des égalités (28.18) et (28.18′) admettent chacun les valeurs limites de l'opérateur des contraintes. C'est pourquoi le potentiel lui-même possède cette même propriété. Le calcul immédiat de l'opérateur $T_n$ des deux côtés de la surface conduit à l'égalité demandée. La démonstration se fait d'une manière analogue dans le cas où l'on suppose l'existence d'une valeur limite de l'opérateur $T_n^-$.

Remarquons que les propriétés obtenues du potentiel de couche double permettent de résoudre de façon élémentaire le problème d'une grande importance pratique relatif aux serrages. Supposons que le milieu élastique soit disposé aussi bien à l'extérieur, qu'à l'intérieur d'une certaine surface de Liapounov $S$ et que soient réalisées à la frontière les conditions

$$U^+(q)-U^-(q)=F_1(q), \quad T_n^+U(q)=T_n^-U(q).$$

Il découle des propriétés évoquées du potentiel de couche double de première espèce, que la solution de ce problème (tout en supposant l'existence des valeurs limites de l'opérateur $T_n$) est représentable sous forme d'un potentiel de couche double

$$W_2^{\rm I}(p)=\frac{1}{2}\int_S \Gamma_2^{\rm I}(p, q)\, F_1(q)\, dS_q. \qquad (28.19)$$

On voit la possibilité d'étendre cette approche au cas où le domaine global occupé par deux corps élastiques n'est pas l'espace tout entier. Dans ce cas la différence des déplacements recherchés et du potentiel (28.19) nous conduit à un problème nouveau dès que l'on considère un corps continu pour lequel les conditions aux limites ont été modifiées en conséquence sur les surfaces extérieures. Il est à remarquer que le problème plan analogue résolu au § 22 a exigé beaucoup plus d'efforts.

Envisageons en dernier lieu le potentiel dit potentiel élastique de volume généralisé

$$U(p) = \int_{\Omega} \Gamma(p, p') \varphi(p') \, d\Omega_{p'}, \tag{28.20}$$

où l'intégration est étendue à tout le volume $\Omega$. On montre que ce potentiel est solution particulière des équations de la théorie du potentiel, quand les forces de masse sont égales à $\varphi(p)$.

## § 29. Equations intégrales régulières et singulières des problèmes fondamentaux spatiaux

Les potentiels élastiques généralisés introduits plus haut: de couche simple, de couche double de première espèce, de couche double de deuxième espèce ainsi que le potentiel d'antenne, conduisent à des équations intégrales correspondantes. On peut en principe utiliser, pour résoudre le premier ou le deuxième problème, n'importe lequel des potentiels introduits, puisque les équations d'équilibre élastique sont identiquement vérifiées pour les déplacements (équations de Lamé). Il est à souhaiter, cependant, que les équations obtenues aient une structure avantageuse, c'est-à-dire qu'elles appartiennent aux classes d'équations intégrales de deuxième espèce. Aussi doit-on rechercher la solution du premier problème fondamental (problème I) sous la forme d'un potentiel de couche double, de première ou de deuxième espèce (dans les autres cas on arrive à des équations intégrales de première espèce).

Soit $f(q)$ la valeur limite des déplacements donnée sur la surface $S$. En recherchant la solution sous la forme d'un potentiel généralisé de couche double de première espèce (28.5), nous obtenons en vertu des formules (28.10') des équations intégrales pour les problèmes intérieur et extérieur respectivement. Représentons immédiatement ces équations sous une forme standard pour les équations intégrales de deuxième espèce en introduisant le paramètre auxiliaire $\nu$:

$$\varphi(q) - \nu \int_{S} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q') \varphi(q') \, dS_{q'} = F(q). \tag{29.1}$$

La valeur $\nu = 1$ correspond au problème intérieur $(\mathrm{I}^+)$, la valeur $\nu = -1$ au problème extérieur $(\mathrm{I}^-)$. La fonction $F(q)$ est égale à $f(q)$ pour le problème extérieur et à $-f(q)$ pour le problème intérieur. L'équation (29.1) est singulière puisque la matrice $\Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')$ possède des termes à singularité de second ordre $(\omega_{ij})$.

Les équations intégrales admettront en apparence une forme tout à fait analogue dans le cas où la solution est recherchée sous la forme d'un potentiel de couche double de deuxième espèce (les

équations dites *équations de Lauricella*)

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{II}(q,\ q')\,\varphi(q')\,dS_{q'} = F(q). \tag{29.2}$$

La différence de principe existant entre les équations (29.1) et (29.2) consiste, comme nous l'avons noté, en ce que la première de celles-ci est singulière, et la seconde régulière.

Passons à la considération du deuxième problème fondamental, au problème II. Supposons que sur la surface $S$ sont données les contraintes $f(q)$ *). Résolvant ce problème à l'aide d'un potentiel de couche double, de première ou de deuxième espèce, on arrive à des équations fonctionnelles dont la résolubilité n'est pas étudiée. Dans un certain sens, on ne peut même pas dire que ce sont des équations intégrales puisque l'intervertissement de l'ordre d'intégration et de l'opérateur des contraintes est exclu.

Nous rechercherons la solution du deuxième problème fondamental sous la forme d'un potentiel de couche simple. Il découle alors de (28.13′) une équation intégrale qu'il est commode d'écrire sous la forme

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_1(q,\ q')\,\varphi(q')\,dS_{q'} = F(q). \tag{29.3}$$

Ici la valeur $\nu = 1$ correspond au problème extérieur $II^-$, la valeur $\nu = -1$ au problème intérieur $II^+$. La fonction $F(q)$ est égale à $f(q)$ dans le problème intérieur et à $-f(q)$ dans le problème extérieur. L'équation intégrale (29.3) s'avère une équation intégrale singulière de deuxième espèce.

Des équations analogues (régulières, il est vrai) sont obtenues si l'on recherche la solution à partir du potentiel d'antenne. Ces équations découlant directement de l'égalité limite (28.14) s'écrivent

$$\varphi(q) + \nu \int_S T_{n(q')} M(q',\ q)\,\varphi(q')\,dS_q = F(q), \tag{29.4}$$

$\nu = -1$ (problème $II^+$) et la surface $S$ est convexe **).

Passons à l'étude de la résolubilité de toutes les équations obtenues ***). Nous supposerons que l'alternative de Fredholm peut être appliquée aux équations singulières introduites plus haut (la démonstration en sera donnée au § 30).

---

*) Pour la généralité de l'écriture nous conservons les mêmes notations que celles utilisées pour le premier problème.

**) Bien entendu, les résultats de Ya. Lopatinski [1], qui permettent de ramener les problèmes aux limites pour les systèmes elliptiques à des équations intégrales régulières, s'étendent aux équations de la théorie de l'élasticité.

***) Les équations (29.1) et (29.3) sont proposées par V. Kupradze [2].

Considérons les équations intégrales (29.1) et (29.3) pour $\nu = 1$. Ces équations singulières étant associées, leur résolubilité est établie simultanément. Supposons que ces équations homogènes admettent des solutions non triviales et soit $\varphi_0(q)$ la solution correspondante de l'équation du problème $\mathrm{II}^-$. Reportons-nous alors à un potentiel de couche simple $V(p, \varphi_0)$. Cette fonction résout le problème de l'élasticité pour des contraintes nulles sur la surface $S$, et les déplacements à l'infini étant de l'ordre de $\frac{1}{R}$ et les contraintes de l'ordre de $\frac{1}{R^2}$. En vertu du théorème d'unicité pour un domaine infini, la solution est identiquement nulle. D'autre part, le potentiel $V(p, \varphi_0)$ représente une fonction continue dans tout l'espace. C'est pourquoi le champ des déplacements qu'il engendre dans le domaine $D^+$ s'annule sur $S$. Il découle du théorème d'unicité pour le premier problème fondamental, que ces déplacements (en d'autres termes le potentiel $V(p, \varphi_0)$) sont nuls dans tout le domaine $D^+$. La solution non triviale introduite plus haut doit être égale à la moitié de la différence des valeurs limites de l'opérateur $T_n V(p, \varphi_0)$ aux points de la surface $S$ (d'après (28.13)) et donc à zéro.

Par conséquent le nombre $\nu = 1$ n'est pas valeur propre des équations intégrales (29.1) et (29.3). Les alternatives de Fredholm nous permettent de conclure par ailleurs, que les équations intégrales singulières des problèmes $\mathrm{I}^+$ et $\mathrm{II}^-$ sont résolubles quels que soient leurs seconds membres.

Plus haut on a établi les équations intégrales en utilisant telle ou autre représentation du vecteur des déplacements recherché. Nous allons présenter maintenant un autre procédé d'élaboration des équations intégrales. Utilisons la formule de Betti pour une fonction vecteur arbitraire $U(p)$ vérifiant les équations de Lamé dans le domaine $D^+$. Supposons que sur la surface $S$ soient données les contraintes $T_n U(q) = f(q)$. On considère alors que la seconde intégrale de (14.27) est connue, désignons-la par $\Phi(p)$. Réalisons dans (14.27) le passage à la limite de l'intérieur vers les points de la surface $S$. Conformément à (28.10') nous obtenons, après réduction des termes semblables, une équation intégrale pour le déplacement $U(q)$ sur la surface $S$:

$$U(q) + \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U(q')\, dS_{q'} = \Phi(q). \qquad (29.5)$$

En utilisant la formule analogue (14.30) pour les déplacements dans le domaine $D^-$ nous sommes conduits par les mêmes raisonnements à l'équation intégrale

$$U(q) - \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U(q')\, dS_{q'} \doteq \Phi(q). \qquad (29.5')$$

Il est évident que ces deux équations peuvent s'écrire sous une forme qui englobe les deux cas, si on introduit le paramètre $\nu$:

$$U(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q,\ q')\, U(q')\, dS_{q'} = \Phi(q). \qquad (29.6)$$

La valeur $\nu = 1$ correspond au problème $\mathrm{II}^-$, la valeur $\nu = -1$ au problème $\mathrm{II}^+$. On reconnaît dans (29.6) l'équation (29.1).

L'obtention immédiate des équations intégrales pour le premier problème fondamental à l'aide des formules de Betti conduit à une équation intégrale de première espèce avec un noyau régulier. Une équation singulière de deuxième espèce sera obtenue, par contre, si l'on prend de tous les termes de la formule de Betti l'opérateur des contraintes, tout en supposant que ses valeurs limites dues à un potentiel de couche double de densité donnée $U(q)$ existent. On obtient définitivement des équations coïncidant avec les équations (29.3).

T. A. Cruse donne dans ses travaux *[1-3] la préférence aux équations intégrales singulières obtenues à l'aide des formules de Betti. L'auteur suppose que ces équations sont applicables pour les surfaces régulières par morceaux également, puisque les identités de Betti sont vraies pour de telles équations. Cependant lorsqu'on réalise le passage à la limite vers les points de la surface, il faut utiliser les formules prévues pour un potentiel de couche double, qui ne sont valables que pour les surfaces de Liapounov uniquement. Pourtant, la solution concrète du problème peut s'avérer préférable du fait d'une plus grande régularité de la condition aux limites.

Passons à l'étude des équations pour $\nu = -1$, ce qui correspond aux problèmes $\mathrm{I}^+$ et $\mathrm{II}^-$. On a montré au § 14 qu'il existe une solution non triviale du problème intérieur de l'élasticité pour des valeurs nulles des contraintes: elle correspond à un déplacement rigide de la surface du corps et peut être représentée en coordonnées cartésiennes sous la forme:

$$U_1 = a_1 + qx_3 - rx_2, \quad U_2 = a_2 + rx_1 - px_3,$$
$$U_3 = a_3 + px_2 - qx_1, \qquad (29.7)$$

où $a_1$, $a_2$, $a_3$, $p$, $q$ et $r$ sont des constantes arbitraires, et il ne peut y avoir d'autres solutions. Désignons ce déplacement par $U_0(p)$. Il est évident que les contraintes qui lui correspondent sont nulles dans tout le domaine $D^+$. Tâchons de représenter le déplacement $U_0(p)$ sous la forme d'un potentiel de couche double de première espèce réparti sur la surface $S$. Utilisons la formule (14.27) pour le déplacement $U_0(p)$. Nous obtenons alors

$$U_0(p) = -\frac{1}{2} \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p,\ q)\, U_0(q)\, dS_q. \qquad (29.8)$$

Le premier terme de (14.27) disparaît, car $T_n U_0(p) \equiv 0$. Dans les premier et second membres de la relation (29.8) passons à la limite de l'intérieur vers les points de la surface $S$. En vertu de la formule (28.10′) nous obtenons pour le second membre

$$\frac{1}{2} U_0(q') - \frac{1}{2} \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q', q) U_0(q) \, dS_q.$$

Ainsi, il découle de (29.8) que le vecteur $U_0(q)$ doit vérifier l'équation

$$U_0(q') + \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q', q) U_0(q) \, dS_q = 0, \tag{29.9}$$

qui est l'équation intégrale du problème $\mathrm{I}^-$.

Il est évident qu'on peut représenter, d'une manière ou d'une autre, les déplacements $U_0(p)$ caractérisés par six constantes indépendantes $a_1, a_2, \ldots, a_6$ comme l'ensemble de six solutions linéairement indépendantes. On peut, par exemple, agir de la sorte. Nous considérerons successivement que l'une seulement des six constantes est différente de zéro ; dans ce cas à chacune des variantes correspondra sa propre solution, linéairement indépendante, de l'équation (29.9) (notée $\psi_k^*$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$).

Il découle des théorèmes de Fredholm que l'équation associée (l'équation pour le problème $\mathrm{II}^+$) aura pour le moins six solutions linéairement indépendantes. Notons-les $\psi_k(q)$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$ et démontrons qu'elles forment un système complet de solutions linéairement indépendantes des équations du problème $\mathrm{II}_0^+$ (l'indice « 0 » indique que le second membre est nul). Soit $\psi_0(q)$ une autre solution, linéairement indépendante des six solutions introduites plus haut. Considérons les potentiels de couche simple

$$V(p, \psi_0) = \int_S \Gamma(p, q) \psi_0(q) \, dS_q,$$

$$V_k(p, \psi_k) = \int_S \Gamma(p, q) \psi_k(q) \, dS_q.$$

Ces potentiels résolvent le problème $\mathrm{II}_0^+$ pour des valeurs nulles des contraintes sur la frontière, de sorte qu'ils doivent représenter un déplacement rigide. Donc, le potentiel $V(p, \psi_0)$ est une combinaison linéaire des potentiels $V_k(p, \psi_k)$ :

$$V(p, \psi_0) = \sum_{k=1}^{6} C_k V_k(p, \psi_k). \tag{29.10}$$

Récrivons cette égalité sous une autre forme

$$\int_S \Gamma(p, q) \Big[ \psi_0(q) - \sum_{k=1}^{6} C_k \psi_k(q) \Big] dS_q = 0 \qquad (p \in D^+).$$

Notons maintenant l'expression entre parenthèses $\psi(q)$. Dans ce cas le potentiel $V(p, \psi)$ est identiquement nul dans le domaine $D^+$. Raisonnant comme précédemment on peut montrer que dans le domaine $D^-$ ce potentiel est nul, ce qui conduit à la démonstration de l'existence d'une relation linéaire entre la fonction $\psi_0(q)$ et les fonctions $\psi_k(q)$. Il s'ensuit que le système $\psi_k(q)$ est complet et, en vertu de (29.8), que tous les potentiels de couche double $W(p, \psi_k) = 0 \quad (p \in D^-)$.

Passons à la démonstration de l'existence d'une solution de l'équation intégrale du problème II$^+$. D'après le troisième théorème de Fredholm, la condition nécessaire et suffisante de résolubilité de l'équation non homogène (29.3)

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_1(q, q') \varphi(q') \, dS_{q'} = F(q) = f(q)$$

est pour $\nu = -1$ la condition d'orthogonalité du second membre $f(q)$ au système complet de fonctions propres $\varphi_k^*(q)$ de l'équation associée:

$$\int_S f(q) \varphi_k^*(q) \, dS_q = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 6). \tag{29.11}$$

Ces conditions ont un sens mécanique tout à fait déterminé qui devient clair si l'on écrit les fonctions $\varphi_k^*(q)$ sous la forme (29.7), admettant à tour de rôle une des constantes différente de zéro. Dans ce cas les conditions (29.11) s'écrivent

$$\begin{gathered} \int_S f_i(q) \, dS_q = 0, \\ \int_S \{f_i x_{i+1} - f_{i+1} x_i\} \, dS_q = 0, \\ \int_S \{f_i x_{i+2} - f_{i+2} x_i\} \, dS_q = 0, \end{gathered} \tag{29.12}$$

où $f_i$ $(i = 1, 2, 3)$ sont les composantes du vecteur $f(q)$, et $x_4 = x_1$, $x_5 = x_2$, $f_4 = f_1$, $f_5 = f_2$. Il est évident que les formules (29.12) expriment les conditions d'égalité à zéro du vecteur résultant et du moment résultant des efforts appliqués à la surface. Remarquons que la solution de l'équation intégrale (29.3) pour $\nu = -1$ n'est pas unique. La solution complète de cette équation se représente sous la forme d'une somme

$$\varphi(q) = \sum_{k=1}^{6} C_k \psi_k(q) + \varphi^*(q),$$

où $C_k$ sont des constantes arbitraires et $\varphi^*(q)$ la solution particulière de l'équation non homogène. Les potentiels de couche simple $V(p, \psi_k)$ représentent la solution du problème $II^+$ pour des valeurs nulles du vecteur des contraintes. En vertu du théorème d'unicité nous obtenons que ces potentiels représentent le déplacement d'un corps en tant que tout rigide et n'influent pas sur les contraintes.

Par conséquent, (29.11) sont non seulement les conditions de résolubilité de l'équation (29.3) (déterminées à partir de la représentation même de la solution sous une forme spécifique en fonction du potentiel de couche simple), mais aussi les conditions de résolubilité du problème physique initial.

A la différence du problème $II^+$, les conditions de résolubilité de l'équation du problème $I^-$ n'ont pas de sens physique et fixent seulement le fait de la représentation de la solution par un potentiel de couche double. On peut montrer que le potentiel de couche double décroît à l'infini comme $R^{-2}$. Généralement, par ailleurs, les solutions des problèmes décroissent à l'infini comme $R^{-1}$.

Si, par contre, les conditions d'orthogonalité du second membre aux fonctions propres de l'équation associée ne sont pas vérifiées, alors conformément au procédé général *) on introduit dans la représentation du déplacement des termes complémentaires. Le plus simple est de les prendre sous forme de forces concentrées (dont les valeurs sont déterminées à partir des conditions d'orthogonalité) exercées dans le domaine $D^+$. On peut montrer que le système d'équations obtenu alors est toujours résoluble. Pratiquement la réalisation de cette approche n'est pas aisée, étant donné qu'elle exige la connaissance des fonctions propres $\psi_k(q)$ $(k = 1, 2, \ldots, 6)$.

Arrêtons-nous sur l'étude des équations intégrales obtenues à partir des formules de Betti. Comme ces équations sont identiques aux équations (29.1) et (29.3) (avec la transposition adéquate), l'analyse effectuée plus haut s'applique exactement à ces équations (plus bas il sera question des seconds membres de ces équations).

Une analyse complémentaire est à effectuer pour le problème $II^+$, car le second membre de l'équation est de forme complexe et les conditions d'orthogonalité ne se manifestent pas sous forme explicite. L'équation intégrale coïncide avec l'équation (29.1) dans le cas du problème $I^-$ et peut s'écrire:

$$U(q) + \int_S \Gamma_2^{I}(q, q') U(q') dS_{q'} = \int_S \Gamma(q, q') f(q') dS_{q'}. \quad (29.13)$$

Les conditions nécessaires et suffisantes de résolubilité de ce problème sont les conditions

$$\int_S \psi_k(q) \int_S \Gamma(q, q') f(q') dS_{q'} dS_q = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, 6), \quad (29.14)$$

*) Par analogie avec le problème de Dirichlet.

où $\psi_k(q)$ sont les fonctions propres de l'équation associée. On a montré plus haut que les potentiels $V(p, \psi_k)$ représentent des vecteurs de déplacement rigide. C'est pourquoi, intervertissant dans (29.14) l'ordre d'intégration, nous obtenons

$$\int_S \psi_k(q) \int_S \Gamma(q, q') f(q')\, dS_{q'}\, dS_q =$$

$$= \int_S V(q', \psi_k) f(q')\, dS_{q'} = 0. \qquad (29.15)$$

Donc, les conditions de résolubilité de l'équation intégrale (29.13) sont comme auparavant les conditions d'existence de la solution du problème physique initial, qui sont vérifiées automatiquement par substitution.

Passons maintenant à l'analyse des équations intégrales régulières. Nous allons résoudre le premier problème fondamental à l'aide d'un potentiel élastique généralisé de couche double de deuxième espèce. Pour cela récrivons l'équation correspondante sous la forme

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{II}(q, q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = F(q). \qquad (29.16)$$

La valeur $\nu = 1$ correspond au problème $I^+$ et la valeur $\nu = -1$ au problème $I^-$. La fonction $F(q)$ est égale aux déplacements donnés $f(q)$ dans le problème extérieur et à $-f(q)$ dans le problème intérieur.

Envisageons le problème $I^+$ et démontrons que l'équation correspondante est toujours résoluble. Dans le cas contraire l'équation associée homogène

$$\psi(q) - \int_S \Gamma_2^{II}(q', q)\, \psi(q')\, dS_{q'} = 0 \qquad (29.17)$$

posséderait une solution non triviale. Admettons que $\psi_0(q)$ est une telle solution de l'équation (29.17) et formons un potentiel de couche simple de densité $\psi_0(q)$. La condition (29.17) signifie que la valeur limite de l'opérateur $N$ (14.19) $\left(\text{pour } \alpha = \frac{\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu}\right)$ de ce potentiel de l'extérieur est nulle. Mais le potentiel lui-même résout le problème de l'élasticité pour le domaine $D^-$ dans le cas d'une valeur donnée nulle de l'opérateur $N$ sur la surface *). En vertu du théorème d'unicité démontré au § 14 nous obtenons que ce potentiel est nul dans le domaine $D^-$. Mais le potentiel de couche simple étant une

*) Rappelons qu'un problème de ce genre est dépourvu de sens physique, sa position étant néanmoins nécessaire pour démontrer la résolubilité des équations de Lauricella.

fonction continue, il sera nul dans le domaine $D^+$ aussi. Par conséquent, la densité de ce potentiel, proportionnelle au saut des valeurs limites de l'opérateur $N$, sera identiquement nulle.

Des raisonnements analogues permettent d'établir que, la solution du problème intérieur n'étant pas unique, la valeur $\nu = -1$ est une valeur propre de l'équation (29.16).

L'étude des équations intégrales (29.16) pour $\nu = -1$ ne sera conduite de façon satisfaisante que si les fonctions propres des équations associées sont connues (ici est de rigueur l'analogie avec le problème de Dirichlet). La procédure générale formelle de résolution coïncide entièrement avec celle que nous avons exposée plus haut pour la résolution du problème $I^-$ à l'aide d'un potentiel de couche double de première espèce.

Le problème de la résolubilité de l'équation intégrale (29.4) reste ouvert. Certes, du fait que le problème n'est résoluble qu'à condition de l'équilibre du corps découle automatiquement que le nombre $\nu = -1$ est une valeur propre. Mais il est très possible que ces conditions ne soient pas suffisantes.

Il est clair que les résultats qu'on vient d'obtenir sont entièrement transposables au problème plan de l'élasticité. Il est à remarquer, par ailleurs, que les équations intégrales considérées aux §§ 18 et 19 n'admettent pas de généralisation triviale au cas spatial; c'est la raison pour laquelle elles ont été traitées dans un chapitre séparé.

Dans l'édification de la théorie correspondante on envisage au départ la résolution du problème relatif aux déplacements dans le plan sous l'action d'une force $\boldsymbol{\varphi}$ $(\varphi_1, \varphi_2)$ exercée au point $q$ $(y_1, y_2)$. Considérons la matrice du second ordre

$$\widetilde{\mathbf{\Gamma}}(p_1, p) = \frac{\lambda+\mu}{2\pi\mu(\lambda+2\mu)} \left\| \begin{matrix} \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\ln r - \left(\dfrac{dr}{dx_3}\right)^2, & -\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\dfrac{\partial r}{\partial x_2} \\ -\dfrac{\partial r}{\partial x_1}\dfrac{\partial r}{\partial x_2}, & \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\ln r - \left(\dfrac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 \end{matrix} \right\| \tag{29.18}$$

correspondant à la matrice de Kelvin-Somigliana (14.21) souvent dite *matrice de Boussinesq*. A l'aide de la solution fondamentale (29.18) N. Kakhniashvili [1] a élaboré une théorie analogue pour le problème plan. Il a su former des potentiels de couche simple, de couche double de première et seconde espèce et formuler des théorèmes limites correspondants pour le cas de contours réguliers et de densités de classe H-L.

Les équations intégrales du deuxième problème fondamental (analogues à l'équation (29.3)) peuvent être écrites sous la forme:

$$\boldsymbol{\varphi}(q') - \lambda \int_L \widetilde{\mathbf{\Gamma}}_1(q', q)\, \boldsymbol{\varphi}(q)\, dS_q = \boldsymbol{F}(q), \tag{29.19}$$

où la matrice $\widetilde{\Gamma}_1(q', q) = T_{n(q')}\widetilde{\Gamma}(q', q)$ est la suivante:

$$\widetilde{\Gamma}_1(q'\ q) = \begin{Vmatrix} m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_1}\right)^2 & n_1\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} \\ n_1\frac{\partial r}{\partial x_1}\frac{\partial r}{\partial x_2} & m_1 + n_1\left(\frac{\partial r}{\partial x_2}\right)^2 \end{Vmatrix} \frac{d}{dn(q')}\ln r(q', q) + \\ + m_1 \begin{Vmatrix} 0 & \omega_{12}(q', q) \\ \omega_{12}(q', q) & 0 \end{Vmatrix} \ln r(q', q)$$

et

52 $$m_1 = \frac{\mu}{\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad n_1 = \frac{2(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)}$$

$$\omega_{12} = \frac{\partial}{\partial x_2}\cos(n_{q'}, x_1) - \frac{\partial}{\partial x_1}\cos(n_{q'}, x_2).$$

Ici également, comme dans le cas spatial, les éléments de la matrice (29.18) sont doublés.

Soulignons quelques aspects nouveaux. Si la densité et sa dérivée satisfont à la condition H-L, les valeurs limites de l'opérateur des contraintes existent et sont égales des deux côtés. Dans le cas du problème extérieur $II^-$, on exige pour la régularité de la solution à l'infini, que le vecteur résultant des efforts y soit égal à zéro. La question de l'indice du système d'équations singulières unidimensionnelles obtenu se résout à partir des résultats connus de la théorie de tels systèmes (cf. N. Vékua [1]). Un calcul direct montre que l'indice est nul et c'est pourquoi les alternatives de Fredholm sont applicables aux systèmes d'équations intégrales singulières du problème plan de l'élasticité, ce qui en combinaison avec les théorèmes d'unicité permet de répondre à la question de leur résolubilité.

De même que dans le cas spatial, les équations intégrales du deuxième problème fondamental plan peuvent être obtenues à l'aide de la formule bidimensionnelle de Betti (cf. par exemple F. J. Rizzo * [1]):

$$U(q') + \int_L \widetilde{\Gamma}_2(q', q)\,U(q)\,dS_q = \int_L \widetilde{\Gamma}(q', q)\,F_q\,dS_q. \quad (29.20)$$

Ici on a noté $\widetilde{\Gamma}_2(q', q)$ la matrice adjointe de $\widetilde{\Gamma}_1(q', q)$.

Nous indiquons en conclusion que toute une orientation se consacre exclusivement à l'élaboration et à l'étude des équations intégrales (régulières et singulières) pour les problèmes à symétrie axiale, ainsi qu'au développement des méthodes de leur résolution. Citons les recherches de A. Alexandrov [2-4], Yu. Kopeïkine [3], T. Kermandis *[1], G. N. Polozhi [1, 2], Yu. Soloviev [1-4], D. Sherman [1] et autres.

## § 30. Extension des alternatives de Fredholm aux équations intégrales singulières de la théorie de l'élasticité

On a obtenu au paragraphe précédent les équations intégrales singulières des premier et deuxième problèmes fondamentaux de l'élasticité. Chacune des équations (29.3) et (29.6) représente un système d'équations singulières. Dans ces équations la partie singulière du noyau (du $ij$-ième élément) s'écrit à un facteur près (cf. (14.22)):

$$\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(x_i-y_i)\,n_j-(x_j-y_j)\,n_i}{r^3}\right]. \tag{30.1}$$

Rappelons que lorsqu'on opère un changement de variables l'argument de chaque élément du déterminant symbolique subit une transformation linéaire; la même transformation affecte également l'argument du déterminant symbolique, de sorte que l'ensemble de ses valeurs est invariant par rapport au changement de variables (cf. § 7). Introduisons en chaque point $q$ de la surface délimitant le corps élastique des coordonnées locales disposant les axes $x_1$ et $x_2$ dans le plan tangent et l'axe $x_3$ suivant la normale. En qualité d'inconnues introduisons les composantes des vecteurs $\varphi(q)$ dans le système local de coordonnées $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, ce qui ne modifiera pas non plus l'indice du système. Le système d'équations (29.6), par exemple, s'écrit alors

$$\begin{aligned}
\varphi_1(q) \pm A \int_S \frac{(x_1-y_1)}{r^3}\,\varphi_3(q')\,dS_{q'} + T_1(q) &= F_1(q),\\
\varphi_2(q) \pm A \int_S \frac{(x_2-y_2)}{r^3}\,\varphi_3(q')\,dS_{q'} + T_2(q) &= F_2(q),\\
\varphi_3(q) \pm A \int_S \frac{(x_1-y_1)\,\varphi_1(q')+(x_2-y_2)\,\varphi_2(q')}{r^3}\,dS_{q'} + T_3(q) &= F_3(q).
\end{aligned} \tag{30.2}$$

Ici $T_i(q)$ sont certains opérateurs intégraux réguliers, avec la sint gularité $r^{\alpha-2}$, appliqués aux fonctions $\varphi_1(q)$, $\varphi_2(q)$, $\varphi_3(q)$ ($\alpha$ es- l'exposant de Liapounov de la surface $S$), $A$ une certaine constante- Les caractéristiques des intégrales singulières figurant dans l'équa· tion (30.2) sont $\frac{x_1-y_1}{r}=\cos\theta$ et $\frac{x_2-y_2}{r}=\sin\theta$. On obtient leurs symboles en les multipliant par $2\pi i$ (en remplaçant les arguments $\theta$ par $\lambda$).

Ecrivons maintenant le déterminant symbolique

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & iA\cos\theta \\ 0 & 1 & iA\sin\theta \\ -iA\cos\theta & -iA\sin\theta & 1 \end{vmatrix} = 1-A^2=\frac{3-4\sigma}{4(1-\sigma)^2}. \tag{30.3}$$

Ce déterminant est différent de zéro pour les valeurs du coefficient de Poisson qui présentent de l'intérêt en théorie de l'élasticité.

La matrice symbolique étant hermitienne ($\delta_{ij} = \overline{\delta}_{ji}$), les théorèmes de Fredholm sont vérifiés pour l'équation (29.6). On peut formuler une conclusion analogue pour l'équation (29.3).

Remarquons que la régularisation immédiate des équations intégrales de la théorie de l'élasticité paraît superflue, ne serait-ce qu'en raison de la complexité de l'élaboration du système équivalent correspondant d'équations de Fredholm. Remarquons également que V. Mazia et V. Sapozhnikova [1] donnent une expression de l'opérateur de régularisation.

## § 31. Propriétés spectrales des équations intégrales régulières et singulières. Méthode des approximations successives

Les théorèmes du § 29 sur la résolubilité des équations intégrales régulières et singulières des problèmes fondamentaux spatiaux de la théorie de l'élasticité permettent de justifier entièrement le principe même de l'application de la méthode des équations intégrales. Cependant, lors de la résolution des équations concrètes (des équations de Lauricella pour le problème $I^+$ par exemple) par la méthode d'intégration mécanique, le problème se ramène à un système d'équations algébriques, souvent d'ordre très élevé. Remarquons, par ailleurs, que la résolution des équations singulières bidimensionnelles par la méthode d'intégration mécanique exige une justification théorique appropriée, analogue à celle exposée au § 12 pour le cas des équations unidimensionnelles.

La résolution des équations des problèmes fondamentaux spatiaux par la méthode des approximations successives semble très prometteuse. Ses avantages de calcul seront étudiés en détail au § 33. Nous n'indiquerons ici que sa justification est valable aussi bien pour les équations régulières, que pour les équations singulières et découle des propriétés spectrales de ces équations (cf. § 1).

Démontrons que dans un cercle de rayon unité avec son centre au point zéro, $\nu = -1$ est la seule valeur propre qui, par ailleurs, est pôle de premier ordre de la résolvante. Commençons l'analyse correspondante par l'étude de l'équation intégrale de Lauricella (cf. Pham The Lai *[1])

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{II}(q, q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = f(q), \tag{31.1}$$

qui a pour équation associée

$$\psi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{II}(q', q)\, \psi(q')\, dS_{q'} = g(q). \tag{31.2}$$

Cette équation peut être interprétée comme une équation intégrale obtenue moyennant un potentiel de couche simple $V(p, \psi)$:

$$V(p, \psi) = \int_S \Gamma(p, q)\,\psi(q)\,dS_q$$

pour résoudre le problème aux limites dans le cas où l'on donne sur $S$ une valeur de l'opérateur $N$.

D'une manière analogue à (28.14) écrivons les égalités

$$NV^+ - NV^- = 2\psi(q), \quad NV^+ + NV^- = 2\int_S \Gamma_2^{II}(q, q')\,\psi(q')\,dS_{q'}. \tag{31.3}$$

L'équation (31.2) prend alors la forme

$$(1-\nu)[NV^+] - (1+\nu)[NV^-] = 2g(q). \tag{31.4}$$

Appliquant la formule généralisée de Betti (14.14) au déplacement $V(p, \psi)$ dans le domaine $D^+$, nous obtenons

$$\int_S V(q, \psi)\,NV^+\,dS_q = \int_{D^+} E(V, V)\,d\Omega, \tag{31.5}$$

où $E(V, V)$ est déterminée par la formule (14.17). De la même façon nous obtenons pour les déplacements dans le domaine $D^-$:

$$\int_S V(q, \psi)\,NV^+\,dS_q = -\int_{D^+} E(V, V)\,d\Omega. \tag{31.6}$$

Remarquons que le premier membre de (31.5) est toujours négatif, alors que dans (31.6) il est toujours positif.

Définissons sur la surface $S$ deux fonctions continues $\psi_a(q)$ et $\psi_b(q)$, et, les considérant comme des densités, écrivons les potentiels de couche simple $V(p, \psi_a)$ et $V(p, \psi_b)$:

$$V(p, \psi_a) = \int_S \Gamma(p, q)\,\psi_a(q)\,dS_q, \tag{31.7}$$

$$V(p, \psi_b) = \int_S \Gamma(p, q)\,\psi_b(q)\,dS_q. \tag{31.8}$$

En vertu de la formule généralisée (14.15) nous avons

$$\begin{aligned} &\int_S \{V_a N^+ V_b - V_b N^+ V_a\}\,dS_q = 0, \\ &\int_S \{V_a N^- V_b - V_b N^- V_a\}\,dS_q = 0. \end{aligned} \tag{31.9}$$

Démontrons maintenant que tous les pôles de la résolvante de l'équation (31.1) sont réels. Admettons qu'il existe une racine complexe $\nu_0 = a + ib$ et considérons la solution de l'équation homogène (31.2) $\nu_0(q) = \nu_a^0 + i\nu_b^0$, qui lui correspond. Associons à chaque fonction $\nu_a^0$ et $\nu_b^0$ son potentiel de couche simple, soit $V(p, \nu_a^0)$ et $V(p, \nu_b^0)$, et opérons dans l'équation (31.4) une substitution (il s'agit en l'occurrence de remplacer $\nu$ par $\nu_0$):

$$(1-\nu_0)\,[N^+V_a + iN^+V_b] = (1+\nu_0)\,[N^-V_a + iN^-V_b]. \qquad (31.10)$$

Multiplions les deux membres de la dernière égalité par $V_a - iV_b$ et étendons l'intégration à la surface $S$, utilisant pour cela les formules (31.9), il vient:

$$(1-\nu_0)\int\limits_S \{V_aN^+V_a + V_bN^+V_b\}\,dS = \\ = (1+\nu_0)\int\limits_S \{V_aN^-V_a + V_bN^-V_b\}\,dS. \qquad (31.11)$$

Comme la première intégrale est différente de zéro pour $\nu_a^0 \neq 0$ et $\nu_b^0 \neq 0$, la relation $(1 - \nu_0)/(1 + \nu_0)$ est réelle et, par conséquent, $b = 0$. Il ressort également de l'égalité (31.11) que le rapport $(1 - \nu_0)/(1 + \nu_0)$ est une grandeur négative (ou nulle). C'est pourquoi le nombre $\nu_0$ doit être en valeur absolue non inférieur à l'unité. Rappelons que l'étude faite au § 29 a montré que la valeur $\nu = 1$ n'est pas un pôle de la résolvante, alors que la valeur $\nu = -1$ l'est.

Le dernier résultat de la théorie spectrale consiste en la démonstration du fait que tous les pôles sont simples. Soit $\nu_1$ un pôle multiple. Il doit exister alors (cf. (1.29) et (1.30)) deux fonctions sur la surface $S$, que nous désignerons par $\varphi_a$ et $\varphi_b$, vérifiant les égalités suivantes:

$$\varphi_a(q) = \nu_1 \int\limits_S \Gamma_2^{II}(q', q)\,\varphi_a(q')\,dS_{q'},$$

$$\varphi_b(q) - \varphi_a(q)/\nu_1 = \nu_1 \int\limits_S \Gamma_2^{II}(q', q)\,\varphi_b(q')\,dS_{q'}.$$

Représentons ces égalités à l'aide des potentiels $V_a$ et $V_b$ définis par leurs fonctions de densités $\varphi_a$ et $\varphi_b$:

$$\begin{aligned} N^+V_a - N^-V_q &= \nu_1\,[N^+V_a + N^-V_a], \\ N^+V_a - N^-V_a + N^+V_b - N^-V_b &= \nu_1\,[N^+V_b + N^-V_b]. \end{aligned} \qquad (31.12)$$

Multipliant la première égalité par $V_b$ et la seconde par $V_0$, ajoutant et intégrant, nous obtenons compte tenu de (31.9):

$$\int\limits_S V_aN^+V_a\,dS = \int\limits_S V_bN^-V_b\,dS. \qquad (31.13)$$

En vertu de (31.5) et (31.6) les expressions entrant dans les premier et second membres de l'égalité (31.13) doivent être de signes différents, le second membre devant être en outre non nul. Il y a donc contradiction et c'est pourquoi tous les pôles de la résolvante sont simples.

Il ressort de ce qu'on vient de démontrer que l'équation intégrale (29.2) peut être résolue par la méthode des approximations successives pour $\nu = 1$, si l'on utilise la solution sous la forme (10.7) et (10.9).

Abordons maintenant l'étude des équations intégrales singulières. Récrivons les équations singulières des problèmes fondamentaux spatiaux de l'élasticité, qui dans le cas du premier problème fondamental sont de la forme

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = F(q), \tag{29.1}$$

et dans le cas du deuxième problème fondamental

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_1(q, q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = F(q), \tag{29.3}$$

$$U(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U(q')\, dS_{q'} = \Phi(q). \tag{29.6}$$

Comme les équations (29.1) et (29.3) sont associées et les équations (29.1) et (29.6) coïncident (différant uniquement par leurs seconds membres et les fonctions cherchées), il est sensé d'effectuer simultanément l'étude de leurs propriétés spectrales.

En répétant, dans les grandes lignes, l'analyse exposée plus haut pour les équations de Lauricella avec la substitution de l'opérateur $N$ par l'opérateur $T$ (et remplaçant, bien entendu, la formule généralisée de Betti (14.14) par la formule usuelle), on peut montrer que toutes ces équations singulières n'admettent que des valeurs propres réelles, non inférieures en module à l'unité. Les valeurs $\nu = 1$ et $\nu = -1$, elles, ont été considérées au § 29.

La démonstration de l'applicabilité des alternatives de Fredholm à l'équation (29.3) présentée au § 28 s'étend évidemment aux autres équations. Du fait de l'existence d'une régularisation équivalente découle, comme nous l'avons montré au § 30, la possibilité de représenter la solution des équations singulières à l'aide de la résolvante. L'étude du comportement de la résolvante au voisinage du point $\nu = -1$, effectuée de la même façon que pour l'équation régulière (29.2), c'est-à-dire à l'aide des équations (1.29) et (1.30), montre (V. Kupradze [3]) que ce point est un pôle simple de la résolvante, alors que le coefficient de $1/(\nu + 1)$ dans son développement est solution de l'équation homogène associée (en tant que fonction de l'argument $q$).

Il découle de l'exposé précédent que les équations intégrales singulières des problèmes fondamentaux de l'élasticité peuvent être résolues par la méthode des approximations successives, à l'exclusion des équations du problème $I^-$ (puisqu'en général on ne peut établir les conditions de leur résolubilité). Cette remarque est due à Pham The Lai *[1].

On peut résoudre l'équation (29.1) pour $\nu = 1$ (problème $I^+$) à l'aide des séries (10.8) ou (10.10). D'une manière analogue il convient de résoudre les équations (29.3) et (29.6) dans le cas du problème $II^-$. Dans le cas du problème $II^+$ la série initiale (10.2) s'avère convergente. Comme nous l'avons indiqué au § 10, cet algorithme est incorrect, aussi la série doit-elle être comprise au sens asymptotique dans le cas des équations (29.3) et (29.6). Dans le cas de l'équation (29.3) la solution s'élabore également à l'aide de la représentation modifiée de la fonction $\tilde{\varphi}_n(p)$

$$\tilde{\varphi}_n(p) = \varphi_n(p) - \sum_{i=1}^{6} \psi_i(p) \int_S \psi_i(q)\, \varphi_n(q)\, dS_q. \qquad (31.14)$$

Ici $\psi_i(p)$ sont des fonctions propres orthonormées de l'équation (29.1) (linéaires comme on a montré au § 29).

Abordons la résolution des équations mentionnées. Arrêtons-nous tout d'abord sur l'équation singulière obtenue en associant (29.1) et (29.6) *) et l'équation (29.3):

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_2^{I}(q,\ q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = F(q), \qquad (31.15)$$

$$\varphi(q) - \nu \int_S \Gamma_1(q,\ q')\, \varphi(q')\, dS_{q'} = F(q). \qquad (29.3)$$

La réalisation de la méthode des approximations successives dans son application aux équations (31.15) et (29.3) revient au calcul des intégrales

$$\begin{aligned} \varphi_n(q) &= \int_S \Gamma_2^{I}(q,\ q')\, \varphi_{n-1}(q')\, dS_{q'}, \\ \varphi_n(q) &= \int_S \Gamma_1(q,\ q')\, \varphi_{n-1}(q')\, dS_{q'}. \end{aligned} \qquad (31.16)$$

Ces intégrales étant singulières, on ne peut pas appliquer les formules d'intégration connues pour leur calcul. P. Perline [7, 9, 10]

*) Vu qu'elles coïncident (avec les notations adéquates).

propose d'utiliser les identités

$$\int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\,\varphi(q')\,dS_{q'} = -\varphi(q) + \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\,[\varphi(q') - \varphi(q)]\,dS_{q'}, \tag{31.17}$$

$$\int_S \Gamma_1(q, q')\,\varphi(q')\,dS_{q'} = \\ = -\varphi(q) + \int_S \{\Gamma_1(q, q')\,\varphi(q') - \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\,\varphi(q)\}\,dS_{q'}, \tag{31.18}$$

dont on peut dire qu'elles sont représentations régulières des intégrales singulières, puisque leurs seconds membres représentent des intégrales impropres *) (quand la fonction $\varphi(q)$ appartient à la classe H-L). On a établi ces identités en se basant sur la méthode d'abaissement de l'ordre des singularités avancée par L. Kantorovitch [1], tout en utilisant l'égalité (28.8) et le fait que les termes singuliers des matrices $\Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')$ et $\Gamma_1(q, q')$ sont identiques.

Appliquant ces représentations pour le calcul des seconds membres des relations (31.1) nous sommes conduits aux relations récurrentes

$$\varphi_n(q) = -\varphi_{n-1}(q) + \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\,[\varphi_{n-1}(q') - \varphi_{n-1}(q)]\,dS_{q'}. \tag{31.17'}$$

$$\varphi_n(q) = -\varphi_{n-1}(q) + \\ + \int_S \{\Gamma_1(q, q')\,\varphi_{n-1}(q') - \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\,\varphi_{n-1}(q)\}\,dS_{q'}. \tag{31.18'}$$

Dans l'article de V. Likhovtsev et P. Perline [1] la question suivante est étudiée. Supposons que l'on résolve une équation quelconque, quand les conditions aux limites sont différentes de zéro uniquement dans une petite partie de la surface frontière. Alors il est dénué de sens d'utiliser les recommandations formulées plus haut, car on peut assurer avec un degré suffisant de confiance que les densités inconnues diffèrent très peu de zéro sur une surface qui dépasse d'au plus deux ou trois fois la zone sollicitée. Aussi convient-il pour résoudre les équations intégrales de n'étendre l'intégration qu'à la partie restante de la surface. Il est nécessaire par ailleurs d'introduire de nouvelles représentations régulières, les représentations (31.17) et (31.18) étant basées sur l'identité (28.8), vraie pour une surface fermée seulement.

---

*) Remarquons que pour l'intégrale avec le noyau $\Gamma_2^{\mathrm{II}}(q', q)$ a lieu une identité analogue à (31.17) qu'on peut utiliser pour améliorer l'efficacité des calculs.

Arrêtons-nous sur le procédé proposé par N. Kournosov et V. Likhovtsev (cf. V. Likhovtsev [1]). Désignons par $S_1$ la partie de la surface $S$, que l'on utilisera dans les calculs. Récrivons la formule (28.8) sous la forme

$$\int_{S_1} \Gamma_2^1(q, q')\, dS_{q'} = -E - \int_{S-S_1} \Gamma_2^1(q, q')\, dS_{q'}.$$

La relation récurrente, analogue à (31.17′), prendra alors la forme *)

$$\varphi_n(q) = -\varphi_{n-1}(q)\left[E + \int_{S-S_1} \Gamma_2^1(q, q')\, dS_{q'}\right] + \\ + \int_{S_1} \Gamma_2^1(q, q')\,[(\varphi_{n-1}(q') - \varphi_{n-1})(q)]\, dS_{q'}. \quad (31.19)$$

La seconde intégrale sera régulière puisqu'elle est déterminée uniquement aux points de la surface $S_1$. Il n'y aura pas de difficulté à calculer cette intégrale le long de la courbe délimitant la surface $S_1$, puisque, premièrement, il est indiqué de n'effectuer les calculs que pour les points intérieurs à $S_1$ et, deuxièmement, les densités correspondantes aux points de bords sont tellement petites (d'après la position du problème) que l'erreur commise lors de la détermination de l'intégrale sera faible.

Il est maintenant facile d'écrire la relation récurrente correspondant à (31.18′).

Les représentations introduites s'avèrent utiles également pour la résolution des problèmes concernant des domaines semi-infinis. On peut naturellement, en faisant passer une surface auxiliaire de dimensions suffisamment grandes à l'intérieur ou à l'extérieur du corps, parvenir au problème intérieur ou extérieur correspondant. Si, par ailleurs, on exige que les conditions aux limites initiales soient auto-équilibrées, il est alors superflu pour la résolution de l'équation intégrale d'étendre l'intégration à toute la surface fermée, ce qui conduit à la nécessité d'utiliser les relations récurrentes sous la forme (31.19).

## § 32. Propriétés différentielles des solutions des équations intégrales et des potentiels élastiques généralisés

Dans la position des problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité on exigeait que la solution soit régulière (c'est-à-dire qu'elle admette des dérivées premières continues dans le domaine fermé $\bar{D}$ et

*) Le cas particulier d'une surface $S_1$ plane est considéré dans l'article cité de V. Likhovtsev et P. Perline [1].

des dérivées secondes continues dans le domaine ouvert $D$). Pourtant, il découle des résultats obtenus plus haut, que si la surface frontière appartient à la classe des surfaces de Liapounov et les conditions aux limites à la classe H-L, la solution des équations intégrales sera alors de classe $L_2$. Il se trouve nécessaire de répondre à une dernière question : les potentiels de couche simple ou double correspondants représenteront-ils des fonctions régulières (dans le sens indiqué plus haut) ? Cette question est très complexe du point de vue mathématique. C'est pourquoi nous nous limitons uniquement à quelques définitions et à la formulation des principaux résultats *). Nous admettrons que la fonction $\varphi(p)$ appartient à la classe $C^k(\bar{D})$ si en chaque point du domaine $D$ elle possède toutes les dérivées jusqu'à l'ordre $k$ qu'on peut prolonger par continuité sur la surface. Si, en outre, les dérivées d'ordre $k$ sont de classe H-L d'indice $\alpha$, on écrit alors $\varphi \in C^{k,\alpha}(\bar{D})$. Avec ces notations l'appartenance de la fonction à la classe H-L s'écrit : $\varphi \in C^{0,\alpha}(\bar{D})$. On dira que la surface $S$ est une surface de classe $Л_k(\alpha)$, si son équation $\xi_3 = \gamma(\xi_1, \xi_2)$ dans le système local de coordonnées $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ (le plan $\xi_1, \xi_2$ est tangent et l'axe $\xi_3$ dirigé suivant la normale) est telle que la fonction $\gamma(\xi_1, \xi_2)$ appartient à la classe $C^{(k,\alpha)}$. Dans ce cas l'appartenance de la surface à la classe des surfaces de Liapounov se note : $S \in Л_1(\alpha)$.

Introduisons une position généralisée des problèmes aux limites de la théorie de l'élasticité. Nous estimerons que les potentiels élaborés à l'aide des solutions des équations intégrales (29.1), (29.3) et (29.6), avec les contraintes formulées plus haut imposées à la surface et aux conditions aux limites, donnent précisément la solution des problèmes aux limites généralisés.

Citons quelques résultats justiciables de contraintes si fortes imposées à la surface et aux conditions aux limites, assurant que la résolution des équations intégrales conduit à des déplacements réguliers (autrement dit, on résout le problème dans sa position classique) :

1. Si $S \in Л_{n+1}(\alpha)$, $\varphi \in C^{n,\beta}(S)$ $(0 < \beta < \alpha)$, alors le potentiel de couche double $W(\varphi) \in C^{n,\beta}(\bar{D})$.

2. Si $S \in Л_{n+1}(\alpha)$, $\varphi \in C^{n,\beta}(S)$ $(0 < \beta < \alpha)$, alors le potentiel de couche simple $V(\varphi) \in C^{n+1,\beta}(\bar{D})$.

3. Si la densité du potentiel de couche simple $\varphi \in L_p$, il existe alors en tous les points de la surface $S \in Л_1(\alpha)$ des valeurs frontières limites (par un chemin non tangent), déterminées par les formules

$$W^{\pm}(\varphi) = \pm \varphi(p) \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\, \varphi(q)\, dS_q.$$

*) Cf. T. Guéguélia [1, 2], ainsi que V. Kupradze, T. Guéguélia et autres [1].

Rappelons que la même formule a lieu dans le cas où $\varphi \in C^{0,\beta}$, et le potentiel lui-même est une fonction qui se prolonge par continuité.

Arrêtons-nous aux propriétés des dérivées (par rapport aux coordonnées cartésiennes) du potentiel de couche simple. Si sa densité est de classe $C^{n,\beta}$, alors les valeurs limites des dérivées (par un chemin non tangent) existent, et dans le cas où $\varphi \in C^{0,\beta}$ elles se trouvent prolongeables par continuité sur la surface.

Citons également le résultat suivant. Soit $S \in Л_{r+1}(\alpha)$, $f \in C^{r,\beta}$ $(\alpha > \beta > 0)$. Dans ce cas toute solution des équations intégrales (29.1), (29.3) et (29.6) appartenant à la classe $L_2$ est également de classe $C^{r,\beta}(S)$ *). Il découle de ce qui vient d'être dit que si $S \in Л_2(\alpha)$ et $f \in C^{1,\beta}$, la résolution des équations intégrales conduit alors à celle du problème aux limites dans sa position classique.

## § 33. Méthodes approchées de résolution des équations intégrales des problèmes fondamentaux spatiaux

Abordons le calcul numérique des équations intégrales étudiées plus haut. Décrivons le schéma de calcul servant à la résolution des équations intégrales (29.1), (29.3), (29.6) par la méthode des approximations successives (cf. P. Perline [10]). Conformément aux principes généraux exposés au § 10, divisons la surface $S$ en domaines $S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$, dont les sommets seront désignés par $q_j^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ et les points centraux par $q_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Rappelons que nous avons convenu d'appeler les points $q_j$ points d'appui et les points $q_j^i$ points nodaux. Le calcul des relations de récurrence (31.16) est effectué à l'aide des représentations régulières (31.17) et (31.18).

Nous représentons chaque terme de la somme intégrale respectivement sous la forme

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_j} \Gamma_2^{I}(q_j, q_j^i)\,[\varphi_{n-1}(q_j^i) - \varphi_{n-1}(q_j)]\right\} \frac{\Delta S_j}{n_j}, \tag{33.1}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_j} [\Gamma_1(q_j, q_j^i)\,\varphi_{n-1}(q_j^i) - \Gamma_2^{I}(q_j, q_j^i)\,\varphi_{n-1}(q_j)]\right\} \frac{\Delta S_j}{n_j}, \tag{33.2}$$

$$\left\{\sum_{i=1}^{n_j} \Gamma_2^{II}(q_j, q_j^i)\,[\varphi_{n-1}(q_j^i) - \varphi_{n-1}(q_j)]\right\} \frac{\Delta S_j}{n_j}, \tag{33.3}$$

où $\Delta S_j$ est l'aire des domaines $S_j$.

*) Notons l'article de A. Khvoles [1] dans lequel sont obtenus des résultats analogues pour des contraintes moins fortes.

Ces expressions permettent de trouver les valeurs des fonctions $\varphi_1(q_j)$ en tous les points d'appui. Puis on trouve par interpolation, à partir des valeurs des fonctions $\varphi_1$ aux points d'appui les plus proches, les valeurs de ces fonctions aux points nodaux, après quoi la procédure est réitérée autant de fois qu'il le faut.

*Tableau 1*

**Valeurs de la densité pour une surface sphérique**

| | $\Phi_0$ | $\Phi_1$ | $\Phi_2$ | $\Phi_3$ | $\Phi_4$ | $\Phi^-$ | $\Phi^+$ | $\Phi^-_{exacte}$ | $\Phi^+_{exacte}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A | 1,000 | 0,247 | 0,063 | 0,015 | 0,004 | -1,329 | 0,804 | -1,312 | 0,807 |
| B | 1,000 | 0,269 | 0,064 | 0,016 | 0,004 | -1,353 | 0,784 | -1,312 | 0,807 |

Considérons les résultats des calculs. Dans le tableau 1 sont résumées les valeurs de quelques fonctions vecteurs $\varphi_n$ (plus précisément, leurs valeurs absolues $\Phi_n$), ainsi que leurs valeurs globales $\Phi^+$ et $\Phi^-$ quand la surface $S$ est une sphère. La surface a été divisée au moyen d'un système géographique de coordonnées, en $8 \times 8$ parties. Le chargement se ramenait à une pression hydrostatique $p$. Le point $A$ est pôle, le point $B$ est pris à l'équateur. On donne pour référence la valeur exacte de la densité. La divergence est due à l'inégalité des domaines élémentaires réels. Les calculs ont été

*Tableau 2*

**Valeurs de la densité pour une surface sphéroïdale**

| | | $\Phi_0$ | $\Phi_1$ | $\Phi_2$ | $\Phi_3$ | $\Phi_4$ | $\Phi_5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 15×15 | A | 1,0000 | 0,0389 | 0,1185 | -0,0057 | 0,0155 | |
| | B | 1,0000 | 0,3371 | 0,1069 | 0,036 | 0,0113 | |
| 25×25 | A | 1,0000 | 0,0474 | 0,1208 | -0,0034 | 0,0158 | -0,0015 |
| | B | 1,0000 | 0,03367 | 0,1083 | 0,0367 | 0,0117 | 0,0040 |

effectués pour un coefficient de Poisson $\nu = 0{,}3$. Les valeurs figurant aux tableaux 1 et 2 sont données en fractions de $p$.

Le tableau 2 donne les résultats des calculs pour un sphéroïde dont le demi-axe de rotation était deux fois plus grand que le petit

demi-axe. Les calculs ont été effectués pour une division de la surface en 15 × 15 et 25 × 25 parties (à l'aide d'un réseau uniforme de coordonnées). Les valeurs des fonctions $\Phi_n$ sont également présentées pour le pôle $A$ et un point $B$ de l'équateur. Le chargement se ramenait à une pression hydrostatique $p$.

Un moyen d'améliorer la précision a été proposé par S. Stoupak qui effectue les calculs des fonctions non en tous les points d'appui (comme il est recommandé plus haut), mais uniquement en certains de ces points, se laissant guider par leur variabilité réelle sur la surface. Après avoir déterminé à ces points « choisis » la fonction $\varphi_n(q_j)$, il propose de déterminer par interpolation les fonctions $\varphi_n(q_j^1)$ en tous les points nodaux et ensuite de réitérer la procédure. On peut naturellement décider du nombre et de la disposition de tels points au cours de calculs préliminaires.

Pour le problème d'une sphère l'auteur a pu atteindre une précision de 0,2 %. La surface a été divisée en 200 × 100 parties et les densités déterminées uniquement en 64 points, de même que dans le calcul représenté au tableau 1.

Ce procédé a été utilisé par S. Stoupak pour la rédaction de son programme de résolution d'un problème portant sur un corps de révolution de forme arbitraire sollicité par une charge à symétrie axiale. Ce programme figure en annexe 1 de l'édition originale du présent ouvrage.

A. Alexandrov [7] a proposé un procédé de résolution des équations intégrales (29.3) qui est le développement de son travail [1] relatif à la résolution des problèmes plans correspondants. Il a établi que dans le cas où la densité du potentiel de couche simple est répartie uniformément sur un rectangle plan, les valeurs limites de l'opérateur au point central sont égales à la valeur de la densité (de signe contraire). C'est pourquoi, rigoureusement parlant, ce procédé de calcul des équations intégrales ne convient qu'aux surfaces polygonales dont les faces concernées soient des rectangles ou d'autres domaines pour lesquels les raisonnements de l'auteur sont valables (il est évident que tels domaines sont pour le moins des triangles équilatéraux). Dans le cas des polygones curvilignes de forme générale, l'application de la formule $T_n V(p, \varphi) = \pm\varphi$ conduit à une certaine erreur.

Ce procédé de calcul d'intégrales singulières permet à l'auteur de proposer un schéma qui ramène les équations intégrales (29.3), résolues par la méthode d'intégration mécanique, à un système d'équations linéaires algébriques. Pour calculer les termes réguliers des sommes intégrales on recommande d'utiliser les formules approchées qu'on obtient en remplaçant la charge uniformément répartie par des forces concentrées. Il est proposé en outre de résoudre le système obtenu par des approximations successives.

Dans ce même article [7] A. Alexandrov envisage le problème d'un cube *), sollicité sur deux faces opposées par une charge uniformément répartie sur tout le carré. Les diagrammes des contraintes sont montrés dans plusieurs sections. Toutefois le manque de solution exacte empêche d'estimer l'erreur.

Dans l'article de T. A. Cruse *[1] l'attention est portée sur le fait que le potentiel de couche double réparti uniformément sur un polygone plan se calcule sous forme explicite pour tout point de l'espace (et sur le polygone en particulier). Ce fait permet de proposer une méthode approchée de résolution de l'équation intégrale (29.6) consistant à la ramener à un système d'équations linéaires (d'ordre assez élevé bien sûr). L'application de cette méthode aux problèmes concernant des corps délimités par des surfaces non planes, exigeant leur remplacement préalable par une surface polygonale, est liée à l'introduction d'une erreur notable. L'auteur note que dans le cas d'un corps comportant une cavité sphérique et sollicité par une pression hydrostatique, l'erreur commise dans la détermination du coefficient de concentration des contraintes atteint 13 % à cause d'une partition non naturelle de la surface.

Disons que l'auteur lui-même (cf. T. A. Cruse *[4]) avoua plus tard qu'avec les ressources actuelles de l'ordinateur l'hypothèse d'une densité constante dans les limites d'un domaine élémentaire conduit à une erreur importante. Ce fait l'a poussé à proposer dans ce même article une formule d'intégration plus exacte (et plus volumineuse) admettant une variation linéaire de la densité (en coordonnées locales). Notons également le travail de J. C. Lachat et J. O. Watson *[1] effectué dans cette même orientation.

Pour ce qui est des travaux cités de Cruse et Alexandrov une remarque est à faire. Comme on a indiqué précédemment (§ 11), la résolution d'une équation de deuxième espèce sur le spectre par la méthode d'intégration mécanique est liée à de grandes difficultés **) du fait que le système est dégénéré. Certes, pour une discrétisation appropriée de la surface, des valeurs sensées de la densité peuvent être obtenues. Il est toutefois naturel de s'attendre à une dispersion des résultats lors de la diminution des dimensions des domaines élémentaires ou simplement lors de la variation de leurs configurations.

Portons notre attention sur un fait de nature purement mathématique. On a démontré au § 11 que la solution approchée des équations intégrales de Fredholm (non disposées sur le spectre), obtenue par la méthode d'intégration mécanique, converge vers la solution

*) Ici l'accent n'est pas mis sur la spécificité des problèmes due à la présence d'arêtes et de sommets sur la surface.

**) Si le problème n'admet pas trois plans de symétrie, conditions indispensables pour que le vecteur résultant et le vecteur moment résultant soient automatiquement nuls.

exacte avec la diminution des domaines partiels. L'obtention d'un résultat analogue dans le cas d'équations singulières unidimensionnelles exigea beaucoup d'efforts (cf. § 12). Le problème relatif à la convergence de la méthode d'intégration mécanique pour les équations singulières dans le cas de deux dimensions et plus reste ouvert, alors que la convergence des approximations successives pour les équations de la théorie de l'élasticité est démontrée.

V. Kupradze [4] propose une méthode approchée de résolution des problèmes fondamentaux spatiaux de l'élasticité moyennant une équation fonctionnelle, obtenue de la formule de Betti

$$\int_S \Gamma(p, q)\, T_n U(q)\, dS_q - \int_S \Gamma_2^{I}(p, q)\, U(q)\, dS_q = 0 \qquad (14.30')$$

pour tous les points $p$ non situés dans le domaine $D$ pour lequel précisément est recherchée la solution. Dans le cas du premier problème fondamental on se donne le premier terme et la fonction inconnue est le vecteur des contraintes extérieures $T_n U(q)$, dans le cas du deuxième problème on se donne le deuxième terme et les fonctions inconnues sont les déplacements $U(q)$ sur la surface.

On fixe en dehors du domaine $D$ un nombre défini de points (que l'on désigne par $p_i$ ($i = 1, 2, \ldots, N$) et on exige que l'équation fonctionnelle (14.30') soit vérifiée en ces points. Pour réaliser les calculs d'après cet algorithme il est nécessaire de diviser la surface $S$ de telle façon que dans les limites de chaque petit domaine $S_i$ la fonction $U(q)$ (ou $T_n U(q)$) soit une grandeur constante conventionnellement donnée. Dans ce cas l'application de telles ou telles formules d'intégration conduira à un système d'équations algébriques par rapport aux inconnues introduites *).

N. Khutorianski [1] obtient un système de relations fonctionnelles en développant en série les noyaux de l'équation fonctionnelle. Il est montré que pour les corps de révolution ce système se décompose en un ensemble de systèmes indépendants.

Donnons l'exposition succincte de la méthode proposée par V. Kupradze et M. Alexidze [1], qu'ils dénomment méthode des séries généralisées. Il faut tout d'abord trouver un système de solutions linéairement indépendantes des équations de l'élasticité dans le domaine $D$ (désignons-les par $\varphi_i(p)$). Ce système doit être complet dans l'espace $L_2$ (sur la surface du corps $S$). Au fait, il est recommandé d'élaborer ce système comme suit. On définit en dehors du corps une surface $S'$ et dans un ensemble dénombrable partout dense de points, désignés comme auparavant par $p_i$, on construit les solutions de Kelvin-Somigliana. Remarquons que ce système de solutions satis-

*) Les questions relatives à la réalisation pratique sont considérées dans les travaux de Yu. Vériouzhski [1] et Yu. Vériouzhski, A. Vousatiouk et V. Savitski [1].

fait aux exigences formulées plus haut. Puis on effectue l'orthonormalisation de ce système de fonctions sur la surface du corps. Après quoi on considère à nouveau les équations fonctionnelles aux points $p_i$. Les multipliant par des facteurs correspondant au passage du système initial de fonctions à un système orthonormé et les ajoutant nous obtenons d'emblée les valeurs des coefficients de Fourier pour la densité cherchée. Il est démontré que le procédé proposé conduit à une solution exacte relativement à la métrique de l'espace $L_2$ (c'est-à-dire en moyenne).

Le problème du calcul des contraintes et des déplacements, connaissant la solution de l'équation intégrale, s'avère de grande importance. Evidemment, la résolution de ce problème ne présente pas de difficultés pour les points internes du corps puisqu'il se ramène au calcul des intégrales régulières correspondantes.

Envisageons tout d'abord la détermination des contraintes dans le cas de la résolution du problème II à l'aide d'un potentiel de couche simple. Les déplacements à la surface se représentent par une intégrale impropre et, comme ont montré les calculs de N. Andrianov [1], sont déterminés avec une erreur plus grande que celle commise pour la densité si l'on utilise (comme on l'aurait voulu) la discrétisation de la surface qu'on utilisait pour la résolution de l'équation intégrale. On recommande d'opérer une subdivision de la surface, fixant aux points correspondants les valeurs de la densité déterminées par interpolation. On conçoit que la subdivision ne doit être effectuée qu'au voisinage du point auquel on détermine le déplacement.

Pour la détermination des contraintes on propose le procédé suivant. Au point considéré de la surface on mène la normale et on détermine en divers points de cette normale la composante du tenseur des contraintes en faisant le calcul de l'intégrale des dérivées correspondantes du noyau (un procédé analogue est utilisé dans l'article de P. Perline, V. Samarov [1]). Ces calculs exigent de même une subdivision de la surface afin d'assurer la précision qu'on s'est donnée dans la détermination des contraintes. Il faut ensuite par extrapolation polynomiale passer à la valeur sur la surface (plus en détail cf. § 36).

Au cours de la résolution du problème I (à l'aide d'un potentiel de couche double), il est indiqué de déterminer les déplacements sur la surface uniquement dans le but de contrôler la précision de la solution aux points différents des points nodaux ou des points d'appui. Aux points suffisamment proches de la surface on peut utiliser des représentations analogues aux représentations régulières (31.17):

$$U(p)=\int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p,q)\,[\varphi(q)-\varphi(q')]\,dS_q-\alpha\varphi(q'), \qquad (33.4)$$

où $q'$ est un point de la surface $S$, proche de $p$, et les coefficients $\alpha = 0$ dans le problème extérieur et $\alpha = 2$ dans le problème intérieur. Comme auparavant, on conseille de déterminer les contraintes à l'aide d'une procédure d'extrapolation (cf. § 36) réalisant dans ce cas une subdivision plus fine de la surface dans le domaine correspondant.

Dans le cas où pour la résolution du problème on fait appel à l'équation (29.6), il faut déterminer le second membre avec la précision nécessaire. De l'information rapportée précédemment sur le calcul des déplacements à partir des densités données (calcul d'un potentiel de couche simple) découle que le calcul du second membre exigera une partition beaucoup plus fine que la partition première utilisée pour la recherche de la solution de l'équation intégrale même. Quant aux contraintes, il sera probablement plus rationnel de les trouver par extrapolation.

Signalons quelques possibilités complémentaires apparaissant au cours de la résolution des équations intégrales par la méthode des approximations successives. Supposons qu'on résout le problème d'un corps de révolution pour des conditions aux limites sans symétrie axiale (cf. N. Andrianov [1]), qui représente le cas général du problème spatial. Remarquons que dans le cas où les conditions aux limites présentent, elles aussi, une symétrie axiale, la procédure de résolution se réduit considérablement puisqu'il est suffisant de déterminer la densité cherchée $\varphi(p)$ sur l'un des méridiens et de la transporter sur toute la surface avec des modifications évidentes.

On propose l'organisation suivante du programme de calculs. (Le programme pour une surface cylindrique est présenté en annexe 2 de la version originale du présent ouvrage). Supposons qu'on calcule la matrice $\Gamma(p, q)$ correspondant à certains points $p$ et $q$ de la surface. Avant de passer à la matrice $\Gamma(p, q^*)$, où le point $q^*$ est généralement un point voisin du point $q$, on construit la matrice $\Gamma(p_1, q_1)$ où les points $p_1$ et $q_1$ sont obtenus des points $p$ et $q$ par rotation d'une division. Il est aisé de voir que les éléments de cette matrice $\Gamma(p_1, q_1)$ s'obtiennent des éléments de la matrice $\Gamma(p, q)$ encore conservés dans la mémoire de l'ordinateur. Cette procédure est réitérée jusqu'à réalisation d'un tour complet autour de l'axe de rotation, après quoi seulement on calcule la matrice $\Gamma(p, q^*)$.

Pour déterminer les éléments des matrices on recommande également d'utiliser la relation $\Gamma_{ij}(p, q) = (-1)^{i+j}\Gamma_{ij}(p, q')$ où le point $q'$ est l'image-miroir du point $q$ par rapport au plan passant par l'axe de rotation et le point $p$.

Un autre avantage de la méthode des approximations successives consiste en ce qui suit. Supposons qu'il faut résoudre les problèmes pour un corps quelconque et un certain ensemble de conditions aux limites. En général, ceci exigerait des calculs réitérés. Dans notre cas on peut, après avoir calculé telle ou telle matrice $\Gamma(p, q)$ et le terme

de la somme intégrale qui lui correspond, calculer immédiatement ce même terme pour le deuxième problème et ainsi de suite, se conformant seulement aux ressources de l'ordinateur.

Passons au cas des problèmes à symétrie axiale. Il est clair que la solution de l'équation intégrale (dans un système de coordonnées cylindrique) ne dépendra pas de la coordonnée angulaire. On a évidemment les égalités:

$$\varphi_x = \varphi_r(r, z)\cos\varphi, \quad \varphi_y = \varphi_r(r, z)\sin\varphi. \tag{33.5}$$

En calculant les sommes intégrales on effectuera la sommation le long des parallèles. Il est parfois possible (S. Stoupak [1]) de mettre en facteur, dans les intégrales, cos φ et sin φ. Ceci permet de réduire notablement l'information à manipuler dans les calculs des itérations, de sorte qu'on peut faire entrer toute l'information nécessaire dans la mémoire opérationnelle de l'ordinateur. Cette circonstance fait que le calcul des itérations suivantes est extrêmement rapide.

Dans le cas où la surface $S$ est une sphère on peut chercher la solution des équations intégrales sous la forme d'une série suivant les polynômes adjoints de Legendre, faisant appel à l'ensemble complet des solutions particulières du problème de la théorie de l'élasticité pour les domaines $D^+$ et $D^-$ (cf. A. Lourié [1]). Considérant le couple correspondant de solutions (pour les problèmes extérieur et intérieur) comme engendré par un même potentiel de couche simple ou double, on arrive, en utilisant les théorèmes limites, à des expressions explicites des densités et donc à la solution des équations intégrales singulières. Ce procédé a été appliqué par P. Perline [4] et P. Perline et S. Stoupak [1] à une étape définie de la résolution des problèmes concernant des corps délimités par deux surfaces.

Notons en conclusion que dans le cas d'une sphère la sommation des solutions en séries peut être réalisée sous forme explicite (cf. D. Natroshvili [1]). Dans ce travail l'auteur a pu faire la sommation des séries obtenues des considérations analogues, ce qui l'a conduit à une forme explicite de la solution.

A la différence du problème spatial, le calcul du problème plan, qui se ramène à des équations singulières unidimensionnelles, n'est pas lié à des difficultés de principe. Comme on a noté au § 12, les intégrales singulières unidimensionnelles peuvent être calculées directement par des formules de structure assez simple. D'autre part, le caractère spécifique des intégrales singulières figurant dans les équations (29.19) et (29.20) permet d'utiliser également des représentations régulières.

Dans l'article [1] F. J. Rizzo propose une méthode de calcul numérique de l'équation intégrale (29.20) *). Le contour d'intégra-

*) Remarquons qu'antérieurement une méthode de résolution des équations intégrales singulières de N. Kakhniashvili [1] a été proposée dans l'article de A. Alexandrov [1].

tion est divisé en un certain nombre d'arcs par les points $t_k$. Un point noté $t_k^0$, également éloigné de $t_k$ et $t_{k+1}$, est choisi sur chacun de ces arcs. Les déplacements $U(t)$ sont supposés constants dans les limites de chacun des arcs et attribués au point correspondant $t_k^0$. On calcule l'équation intégrale en égalant les premier et second membres en tous les points $t_k^0$. Les valeurs des termes singuliers, nécessaires pour cela, sont trouvées sous forme explicite (élémentaire), puisque l'arc $t_k$, $t_{k+1}$ se remplace par la ligne brisée $t_k$, $t_k^0$, $t_{k+1}$ et qu'en fait on calcule l'angle entre $t_k$, $t_k^0$ et $t_k^0$, $t_{k+1}$. Les termes réguliers, eux, sont trouvés à l'aide de la formule de Simpson.

Dans le travail de Rizzo sont donnés des calculs pour une série de problèmes. En particulier, le problème d'un cercle sollicité par une pression normale qui dépend de l'angle polaire suivant la loi $N = P\cos^2\varphi$ est envisagé. Le cercle a été divisé en 12 et 24 arcs égaux. Le point $t_1^0$ correspondait à l'angle $\varphi = 0$. Les valeurs de l'erreur relative $\Delta_1$ et $\Delta_2$ (en fractions du déplacement maximal) *) aux points d'un quadrant sont représentées dans le tableau 3. Le coefficient de Poisson $\nu = 0{,}25$.

*Tableau 3*

**Erreurs de calcul des déplacements dans le cas d'un cercle pour $n = 12$ et $n = 24$**

| Points | $n = 12$ | | Points | $n = 24$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
| 1 | 0,0482 | 0,0000 | 1 | 0,0268 | 0,0000 |
| | | | 2 | 0,0185 | 0,0211 |
| 2 | 0,0003 | 0,0601 | 3 | 0,0000 | 0,0313 |
| | | | 4 | 0,0184 | 0,0258 |
| 3 | 0,0519 | 0,0165 | 5 | 0,0261 | 0,0091 |
| | | | 6 | 0,0184 | 0,0085 |
| 4 | 0,0000 | 0,0317 | 7 | 0,0000 | 0,0157 |

Le problème d'un rectangle, dont les côtés se rapportent comme 1 : 8, est également envisagé. La charge représentait une pression uniforme appliquée sur les petits côtés. Le contour a été partitionné en 48 tronçons égaux, en évitant que les points centraux tombent aux angles. Le point $t_1^0$ est choisi au milieu du petit côté. Les erreurs des déplacements ($\Delta_1$ et $\Delta_2$) aux points d'un quadrant sont représentées dans le tableau 4. Le coefficient de Poisson $\nu = 0{,}2$.

Les questions concernant la résolution effective des équations singulières (29.21) par la méthode d'intégration mécanique moyennant des polynômes d'interpolation sont étudiées par Yu. Kopeïkine, M. Aliaoutdinov et Yu. Bormot [1].

*) Il s'agit des projections des déplacements sur les directions $\varphi = 0$ et $\varphi = \pi/2$. L'erreur est déterminée à l'aide de la solution exacte.

*Tableau 4*

**Erreurs de calcul des déplacements pour un rectangle**

| Points | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ | Points | $\Delta_1$ | $\Delta_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,0036 | 0,0000 | 5 | 0,0033 | 0,0138 |
| 2 | 0,0026 | 0,0015 | 6 | 0,0013 | 0,0126 |
| 3 | 0,0050 | 0,0058 | 7 | 0,0005 | 0,0118 |
| 4 | 0,0102 | 0,0138 | 8 | 0,0000 | 0,0115 |

Envisageons les particularités de résolution des équations intégrales de l'élasticité quand le coefficient de Poisson est proche de 0,5. En posant dans les équations intégrales mêmes $\nu = 0{,}5$, on obtient des équations qui coïncident avec les équations traduisant l'écoulement linéarisé d'un liquide incompressible visqueux, obtenues et étudiées par F. K. G. Odqwist *[1]. Il est montré que ces équations possèdent les mêmes propriétés spectrales que les équations (29.1) et (29.3) et, d'autre part, le point $\lambda = 1$ est pôle simple. Pour l'équation du deuxième problème fondamental extérieur, la fonction propre est connue, c'est une fonction vecteur dirigée suivant la normale à la surface et de même longueur: $\varphi^* (q) = Cn$. Soulignons que l'étude directe des problèmes de l'élasticité pour un milieu incompressible ne peut être conduite à l'aide des équations intégrales (29.1) et (29.3) dans lesquelles on pose $\nu = 0{,}5$. Toutefois il est utile de prendre en compte les propriétés de ces équations lorsqu'on étudie le comportement de la solution pour des valeurs de $\nu$ proches de 0,5.

Comme pour un milieu incompressible le point $\lambda = 1$ est pôle de la résolvante, il est clair qu'en se rapprochant de la valeur 0,5 la convergence des algorithmes décrits plus haut s'empire (puisque le second pôle de la résolvante tend vers 1). Dans le cas du problème $\mathrm{II}^+$ on obtient aisément une représentation convergente. Il est suffisant pour cela d'utiliser la méthode d'élimination du pôle de la résolvante décrite au § 10 (méthode du produit). Dans ce cas pour $\nu = 0{,}5$ la série

$$\varphi (q) = 0{,}5\varphi_0 (q) + 0{,}5 [\varphi_0 (q) - \varphi_1 (q)] - 0{,}5 [\varphi_1 (q) - \varphi_2 (q)] + \\ + 0{,}5 [\varphi_2 (q) - \varphi_3 (q)] - \ldots \qquad (33.6)$$

s'avère convergente. Il est clair qu'elle sera convergente également pour les valeurs de $\nu$ proches de 0,5. Aussi est-il évident que la recherche de la solution à partir de (33.12) exigera pour la réalisation une discrétisation beaucoup plus grossière que celle qui est nécessaire pour la construction de la solution à partir de la série (10.2).

P. Perline, S. Stoupak et A. Novikov [1] proposent une méthode de résolution du problème $II^-$. On commence par résoudre, par approximations successives, le problème aux limites initial pour $\nu = 0{,}5$. Le processus de récurrence conduit à une fonction propre (cf. § 10), et elle est connue d'avance. C'est pourquoi pour une discrétisation suffisamment fine et un nombre nécessaire d'itérations on trouve la valeur de la constante correspondante $C$. On considère ensuite le problème avec les conditions aux limites pour lesquelles la solution en contraintes est connue. Dans ce cas également on détermine une certaine valeur de la constante $C_1$. Retranchant à présent de la solution du problème considéré celle du problème auxiliaire multipliée par $C/C_1$ on obtient de toute évidence un algorithme convergent.

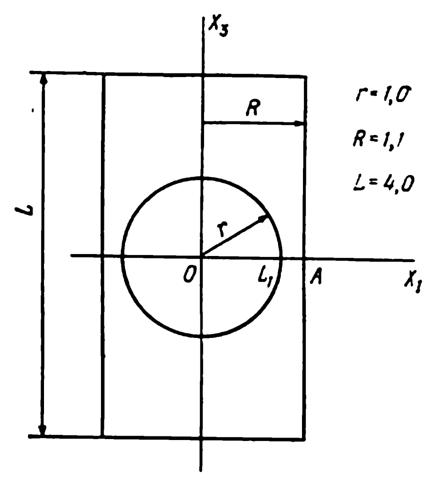


Fig. 17. Cylindre comportant une cavité sphérique.

Aussi est-il recommandé, pour résoudre le problème $II^-$ concernant un milieu proche d'un milieu incompressible, de transformer les conditions aux limites comme on a indiqué. L'algorithme converge alors pour une discrétisation beaucoup plus grossière que celle qui est nécessaire pour le calcul direct du problème.

Notons qu'il existe une classe de problèmes de l'élasticité pour lesquels il est possible, par superposition de certaines solutions particulières, d'élever de façon notable l'efficacité de leur résolution par la méthode des équations intégrales (cf. P. Perline, A. Novikov [1]). Considérons le problème à symétrie axiale d'un cylindre de rayon $R$ comportant une cavité sphérique de rayon $r$ (fig. 17) sollicité de l'intérieur par une pression hydrostatique de valeur unité. Le calcul direct de ce problème dans le cas où $r$ est proche de $R$ est difficile du fait qu'il exige une discrétisation très fine du contour au voisinage des domaines de rapprochement (sur le plan de symétrie) et un nombre important d'itérations.

Un procédé modifié consiste à superposer, à la solution cherchée, la solution

$$\sigma_\rho = -\frac{r^3(R^3-\rho^3)}{\rho^3(R^3-r^3)}, \qquad \sigma_\theta = \sigma_\varphi = \frac{r^3(2\rho^3+R^3)}{2\rho^3(R^3-r^3)}$$

correspondant au problème d'une boule creuse de rayon extérieur $R$ et de rayon intérieur $r$ sollicitée sur sa surface intérieure par une

pression de valeur unité. La levée de la charge de la surface intérieure fait apparaître certaines contraintes sur la surface extérieure (extrémités et surface cylindrique). La différence entre le problème initial et le problème modifié consiste en ce que dans le premier cas les contraintes dans la section menée suivant le plan de symétrie augmentent avec la diminution de $R - r$, puisque

$$\int_S \sigma_{33}\, d\theta = \pi \rho^2, \tag{33.7}$$

où $S$ est la surface de la section transversale ($x_3 = 0$), alors que dans le deuxième cas la même intégrale s'annule, de sorte que les contraintes doivent s'affaiblir avec la diminution de $R - r$.

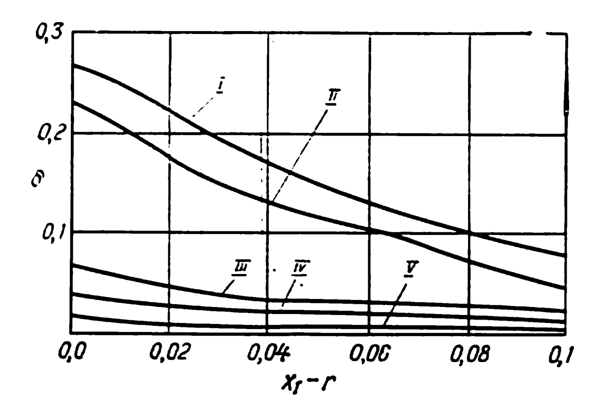



Fig. 18. Erreurs de calcul de la composante $\sigma_{33}$.

Les résultats des calculs qu'on a effectués pour estimer l'erreur sur les contraintes $\sigma_{33}$ suivant le rayon (les dimensions du corps sont indiquées sur la fig. 17, $\nu = 0{,}3$) sont donnés sur la fig. 18. Les courbes I, II, III traduisent les solutions du problème dans sa position initiale, avec 40, 80 et 100 points respectivement sur une moitié de section méridionale et pour 40, 80 et 120 itérations, et les courbes IV et V représentent les solutions obtenues en utilisant le procédé proposé plus haut. A la courbe IV correspondent 40 points et 40 itérations, à la courbe V, 80 points et 50 itérations. L'erreur est celle de la solution élaborée à l'aide du procédé qu'on propose pour un choix de 80 points et l'accomplissement de 80 itérations. Dans ce cas l'erreur de calcul de l'intégrale (33.7) ne dépassait pas 5 %.

## § 34. Problèmes de la théorie de l'élasticité pour des corps délimités par plusieurs surfaces

Soit le domaine $D$ délimité par plusieurs surfaces $S_0$, $S_1$, . . . . . ., $S_m$ disposées en dehors les unes des autres, sauf la surface $S_0$ qui englobe toutes les autres et peut éventuellement faire défaut. Résoudre le problème de l'élasticité pour le domaine $D$ quand sur les surfaces $S_j$ sont données des conditions de type quelconque.

Si sur toutes les surfaces sont donnés les déplacements, nous cherchons la solution sous forme de potentiel de couche double de première ou seconde espèce, et si les contraintes, nous la recherchons alors sous forme de potentiel de couche simple. Dans ce cas nous aboutissons à des équations intégrales que l'on peut représenter symboliquement sous la forme des équations (29.1) à (29.3), si $S$ est utilisé pour l'ensemble des surfaces et les équations sont considérées sur chaque surface. De la sorte on élabore en fait un système d'équations intégrales pour toutes les densités $\varphi_j(q)$ (l'indice de la fonction correspond à l'indice de la surface). Le paramètre $\nu$ est 1 dans le problème I et $-1$ dans le problème II.

Remarquons que les formules de Betti démontrées au § 16 sont automatiquement généralisées au cas considéré, ce qui conduit à l'extension de divers résultats concernant les propriétés spectrales de ces équations (cf. § 31) (toutes les valeurs propres sont réelles et en module inférieures à l'unité). Dans le cas d'équations singulières, les alternatives de Fredholm sont évidemment applicables, puisque les opérateurs complémentaires sont entièrement continus. La principale difficulté est due à une structure plus complexe de la résolvante au voisinage de $\nu = \pm 1$.

Pour effectuer l'étude appropriée des équations que l'on appellera par la suite (29.1) à (29.3) introduisons en considération le problème auxiliaire (associé), c'est-à-dire le problème pour le domaine $D'$ constitué des domaines $D_0^-$, $D_1^+$, . . ., $D_m^+$. Quoique ce problème se décompose en problèmes aux limites élémentaires, indépendants, sa considération par la donnée simultanée sur toutes les surfaces des densités de tels ou tels potentiels présente de l'intérêt puisqu'elle conduit aux équations intégrales adjointes.

Supposons donnés les déplacements sur les surfaces $S_j$. Il existe alors pour l'équation (29.1) que pour l'équation (29.2) les solutions non triviales des problèmes homogènes, qui s'écrivent

$$\varphi_0(q) = 0, \quad \varphi_j(q) = C_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (34.1)$$

où $C_j$ sont des vecteurs constants.

Il découle des théorèmes d'unicité que d'autres solutions (linéairement indépendantes) ne peuvent exister. Par conséquent les équations (29.1) et (29.2) sont, en général, non résolubles.

Pour en venir à des équations régulières résolubles D. Sherman a proposé une modification de la représentation des déplacements, qui est le développement du procédé d'étude du problème de Dirichlet (D. Sherman [8]) traité par lui antérieurement. L'auteur introduit dans la représentation des déplacements les termes

$$\mathbf{\Gamma}(p, p_j) \int\limits_{S_j} \varphi_j(q)\, dS_q, \tag{34.2}$$

où les points $p_j$ sont choisis arbitrairement dans les domaines $D_j^+$. L'équation résoluble de façon unique prend alors la forme

$$\varphi_i(q) - \nu \sum_{j=0}^{m} \int\limits_{S_j} \mathbf{\Gamma}_2^{II}(q, q')\, \varphi_j(q')\, dS_{q'} + \sum_{j=1}^{m} \mathbf{\Gamma}(q, p_j) \int\limits_{S_j} \varphi_j(q')\, dS_{q'} = 0$$

$$(q \in S_i) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{34.3}$$

Il découle du théorème d'unicité que la solution (34.3) (notons-la $\varphi^*(q)$) vérifie l'équation fonctionnelle homogène qu'il convient d'écrire sous la forme

$$\nu \int\limits_{S_0} \mathbf{\Gamma}_2^{II}(p, q)\, \varphi_0^*(q)\, dS_q = \nu \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{S_j} \mathbf{\Gamma}_2^{II}(p, q)\, \varphi_j^*(q)\, dS_q +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \mathbf{\Gamma}_2(p, p_j) \int\limits_{S_j} \varphi_j^*(q)\, dS_q \quad (p \in D). \tag{34.4}$$

Dans les équations (34.4) le sens positif de la normale est choisi vers l'extérieur du corps. Désignons par $U_1(p)$ l'expression du premier membre et par $U_2(p)$ l'expression du second membre. Chacune d'elles peut être considérée dans le domaine $D_0^-$ également. Les déplacements $U_1(p)$ admettent une discontinuité sur la surface $S_0$, les valeurs limites de l'opérateur $N$ coïncident. Pour les déplacements $U_2(p)$ la surface $S_0$ n'est pas une surface particulière. Comme d'après (34.4) les valeurs limites (de l'intérieur) de l'opérateur $N$ de $U_1(p)$ et $U_2(p)$ coïncident, alors coïncideront ses valeurs limites de l'extérieur, ce qui entraîne l'égalité des déplacements $U_1(p)$ et $U_2(p)$ dans le domaine $D_0^-$. De la continuité des déplacements $U_1(p)$ lors du passage à travers $S_0$ découle la nullité de la fonction $\varphi_0^*(q)$.

En tenant compte de ce qui vient d'être dit, récrivons l'équation fonctionnelle (34.4) pour l'indice $i$ choisi de façon arbitraire sous

la forme

$$\nu \int_{S_i} \Gamma_2^{II}(p, q)\, \varphi_i^*(q)\, dS_q + \Gamma(p, p_i) \int_{S_i} \varphi_i^*(q)\, dS_q =$$

$$= -\nu \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m}{}' \int_{S_j} \Gamma_2^{II}(p, q)\, \varphi_j^*(q)\, dS_q -$$

$$- \sum_{j=1,\, j\neq i}^{m}{}' \Gamma_2(p, p_j) \int_{S_j} \varphi_j^*(q)\, dS_q \quad (p \in D). \qquad (34.5)$$

L'expression du premier membre peut être étendue à tout le domaine $D_i^-$, l'expression du second membre, aux domaines $D$ et $D_i^+$. Puisque dans le domaine $D$ ces expressions coïncident, elles se prolongent réciproquement par continuité et représentent une fonction unique vérifiant les équations de Lamé dans tout l'espace et donc nulle. Récrivons l'égalité démontrée

$$\int_{S_i} \Gamma_2^{II}(p, q)\, \varphi_i^*(q)\, dS_q + \Gamma(p, p_i) \int_{S_i} \varphi_i^*(q)\, dS_q = 0 \quad (p \in D_i^-).$$

Son premier terme décroît à l'infini comme $R^{-2}$, son second terme comme $R^{-1}$. Donc ces deux termes sont nuls, autrement dit

$$\int_{S_i} \Gamma_2^{II}(p, q)\, \varphi_i^*(q)\, dS_q = \int_{S_i} \varphi_i^*(q)\, dS_q = 0 \quad (p \in D_i^-). \qquad (34.6)$$

Considérons maintenant le potentiel $\int_{S_i} \Gamma_2^{II}(p, q)\, \varphi_i^*(q)\, dS_q$ dans le domaine $D_i^+$. L'hypothèse de la continuité de l'opérateur $N$ entraîne que ce potentiel ne peut admettre qu'une valeur constante qui en vertu de (34.6) doit être nulle. Ces raisonnements montrent que la fonction $\varphi_i^*(q)$ s'annule. Le choix de l'indice étant arbitraire, nous avons démontré que la fonction $\varphi^*(q)$ est identiquement nulle. Par conséquent, l'équation intégrale (34.3) est toujours résoluble.

Arrêtons-nous à la résolution du problème I à l'aide de l'équation intégrale singulière (29.2). Dans l'article de T. Bourtchouladze [1] qui représente la généralisation de l'approche à la résolution du problème de Dirichlet développée dans l'article de V. Kupradze [1] il est proposé de rechercher les déplacements sous la forme

$$U(p) = \sum_{j=0}^{m} \int_{S_j} \{\Gamma_2^{I}(p, q) - \Gamma(p, q)\}\, \varphi_j(q)\, dS_q, \qquad (34.7)$$

ce qui conduit à l'équation intégrale singulière

$$\varphi_i(q)-\nu\sum_{j=0}^{m}\int_{S_j}\{\Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')-\Gamma(q, q')\}\varphi_j(q')\,dS_{q'}=F(q)$$
$$(q\in S_i)\quad(i=1, 2, \ldots, m).\qquad(34.8)$$

Cette équation diffère de l'équation (29.2) seulement par un terme régulier et c'est pourquoi les alternatives de Fredholm restent applicables.

On étudie l'équation (34.8) à l'aide du *cinquième problème fondamental de la théorie de l'élasticité* (d'après la terminologie adoptée dans l'article de V. Kupradze, T. Guéguélia [1]) quand est donnée sur les surfaces frontières la relation

$$T_nU(q)+\sigma(q)U(q)=f(q),\qquad(34.9)$$

où $\sigma=\|\sigma_{kj}\|$ $(k, j=1, 2, 3)$ et la forme $\sum\sigma_{kj}x_ky_j$ est définie positive.

Nous rechercherons la solution de ce problème pour le domaine $D'$ en représentant les déplacements sous forme de potentiel de couche simple. Pour des conditions aux limites homogènes on parviendra alors à une équation singulière, associée à (34.8). Soit $\psi^*(q)$ sa solution non triviale et $V(p, \psi^*)$ le potentiel correspondant. Du théorème d'unicité appliqué au cinquième problème fondamental découle la nullité de ce potentiel dans les domaines $D_0^-$ et $D_j^+$. La continuité du potentiel de couche simple entraînera son égalité à zéro dans le domaine $D$, d'où la démonstration du fait que l'équation associée homogène ne possède pas de solutions non triviales. Par conséquent, l'équation (34.8) s'avère toujours résoluble.

Ces approches permettent de considérer, en tant que cas particulier, le problème $\mathrm{I}^-$ (quand on a une seule surface $S_1$).

Il convient de noter que la question de la convergence de la méthode des approximations successives pour les modifications considérées plus haut reste ouverte, puisqu'en réalité on a en général affaire à de nouvelles équations intégrales.

Dans l'article [2] N. Muskhelishvili propose une méthode de recherche des équations intégrales pour le problème de Dirichlet qu'il est aisé d'étendre aux problèmes de l'élasticité. Au lieu du problème initial il considère un problème modifié, admettant que les déplacements aux frontières sont déterminés à un déplacement rigide arbitraire près de chaque surface $S_j$. Les représentations des déplacements sont complétées par des termes de forme $\Gamma(p, p_k)C_k$, où les vecteurs constants $C_k$ doivent être déterminés. Des opérateurs intégraux complémentaires tels que leurs noyaux s'annulent, quand les points $p$ et $q$ appartiennent à des surfaces différentes, sont introduits dans les équations qu'on obtient. Quand les arguments sont

situés sur une même surface, les noyaux représentent une matrice constante. Les équations intégrales ainsi obtenues sont toujours résolubles. A la dernière étape il faut déterminer les constantes $C_k$ de telle sorte que le problème modifié coïncide avec le problème initial, ce qui conduit à un système toujours résoluble d'équations algébriques. La structure des termes complémentaires est telle que toute solution de l'équation modifiée est solution de l'équation initiale. Dans ce même travail de N. Muskhelishvili [2] il est montré que les valeurs propres sont en module supérieures à 1, de sorte qu'il est possible de résoudre les équations par la méthode des approximations successives.

Passons à la considération du deuxième problème fondamental. L'équation homogène (associée à l'équation (34.3)) représente une équation intégrale, qui peut être obtenue en résolvant simultanément le premier problème fondamental pour les domaines du système $D'$ prenant les déplacements sous forme de potentiel de couche double de première espèce et les admettant nuls sur les frontières. Les déplacements eux-mêmes seront évidemment nuls, tandis que grâce à la continuité de l'opérateur des contraintes les déplacements dans le domaine $D$, engendrés par ces potentiels, peuvent être assimilés à un déplacement du corps en tant que tout rigide. Par conséquent, une solution non triviale de l'équation associée existe et elle est élémentaire. On peut montrer également qu'elle est unique (cf. T. Burtchuladze [1]). Donc, les équations intégrales (34.3) s'avèrent résolubles quand les conditions d'orthogonalité, qui, comme dans le problème $II^+$, expriment l'égalité à zéro du vecteur résultant et du vecteur-moment résultant des forces extérieures, sont réalisées. Remarquons que dans le cas où la surface $S_0$ fait défaut, le problème est toujours résoluble.

On peut résoudre l'équation (34.3) par la méthode des approximations successives sous forme modifiée (par exemple (10.7)) en redéveloppant (10.2) en série entière dans le plan $\nu$ par rapport à un point quelconque, situé entre $\nu = 0$ et $\nu = -1$. Pour répondre à la question de savoir s'il est possible de la résoudre directement (i.e. sous forme de la série (10.1)), il faut faire son étude quand $\nu = 1$, c'est-à-dire pour les domaines du système $D'$. Il est évident que les équations intégrales correspondant à cette classe de problèmes admettront des fonctions propres qu'il est aisé de trouver puisqu'elles répondent au déplacement indépendant des surfaces $S_j$ ($j = 1, \ldots$ $\ldots, m$) en tant que tout rigide. Pour éliminer les pôles de la résolvante au point $\nu = 1$ il faut exiger que soient réalisées les conditions d'orthogonalité pour chacune des fonctions propres, ce qui équivaut à la condition d'égalité à zéro du vecteur résultant et du vecteur-moment résultant des forces extérieures exercées sur chaque surface. Cette contrainte sur la généralité des conditions aux limites est purement apparente puisque la transformation la plus élémentaire

conduit à leur réalisation (moyennant la superposition à la solution cherchée des solutions pour les forces concentrées et les moments sollicitant les points des domaines $D_j^+$).

La généralisation à la théorie de l'élasticité de l'approche à la résolution du problème de Neumann proposée par N. Muskhelishvili [2] conduit à des conclusions analogues sur la possibilité de résoudre directement les équations (34.3) par la méthode des approximations successives. Il s'avère également possible de résoudre par cette méthode les équations intégrales modifiées de façon correspondante en imposant à la charge les conditions indiquées.

Naturellement, la résolution des problèmes spatiaux de l'élasticité dans le cas de plusieurs surfaces frontières est conduite de la même manière que dans le cas d'une seule surface (en utilisant des représentations régulières), mais, bien entendu, les ressources de l'ordinateur doivent être beaucoup plus importantes. Le manque à l'heure actuelle de calculs par des méthodes de ce genre ne permet pas de juger de l'efficacité de ces approches. De toute évidence, il faut s'attendre à ce qu'avec la diminution de la distance (locale ou globale) entre les surfaces, il faudra non seulement augmenter le nombre d'itérations, mais aussi utiliser une discrétisation de plus en plus fine de la surface.

Il est facile de se représenter l'élaboration des équations intégrales quand sont données sur la surface $S_j$ des conditions aux limites de différents types.

Arrêtons-nous sur une autre méthode de résolution des problèmes pour des corps délimités par deux surfaces, qui a été proposée par P. Perline [2, 5] et qui est la généralisation au cas spatial de la méthode de D. Sherman [12]. Soit un domaine délimité par les surfaces $S_0$ et $S_1$ sur lesquelles sont données les contraintes $f_0(q)$ et $f_1(q)$. Dans ce cas pour l'un des domaines complémentaires, disons pour $D_0^-$, le problème se résout avec la même condition aux limites $f_0(q)$. Notons $\lambda_0(q)$ les déplacements sur la surface $S_0$ dus à l'application de cette contrainte. Puis introduisons sur $S_0$ la fonction auxiliaire $\lambda(q)$ égale au déplacement recherché. On peut montrer que les déplacements $U_1(p) = U(p) + W(p, \mu)$, où $\mu(q) = 0{,}5\,[\lambda(q) - \lambda_0(q)]$ vérifient les équations de Lamé dans le domaine $D_1^-$. Résolvant ce problème (pour la fonction $\mu(q)$ conventionnellement donnée) nous déterminons les déplacements sur la surface $S_0$; les égalant à la fonction $\lambda(q)$, nous parvenons à une équation intégrale singulière pour $\lambda(q)$.

Les cas où les conditions aux limites sont données sous forme de déplacements ou de déplacements et de contraintes sont traités sensiblement de la même manière.

P. Perline [4] et P. Perline et S. Stoupak [1] ont résolu les premier et deuxième problèmes pour un domaine délimité par un ellipsoïde et une sphère, ayant utilisé à cette fin l'appareil des séries.

## § 35. Corps homogènes par morceaux

Nous supposerons tout d'abord qu'un corps élastique illimité, dont les constantes de Lamé sont $\lambda_1$ et $\mu_1$, comporte une cavité remplie d'un milieu élastique avec d'autres constantes, $\lambda_0$ et $\mu_0$. Nous désignerons la surface de contact de ces milieux par $S$ et nous supposerons que les coefficients de Poisson de ces milieux sont les mêmes. On a dans ce cas l'égalité $\lambda_0/\lambda_1 = \mu_0/\mu_1 = k$. Notons $U_1(p)$ le déplacement dans le domaine $D^-$ et $U_0(p)$ dans le domaine $D^+$.

Nous supposerons qu'à la surface $S$ sont remplies les conditions suivantes:

$$U_1(q) - U_0(q) = F_1(q), \tag{35.1}$$

$$T_{1n}U_1(q) - T_{0n}U_0(q) = F_2(q), \tag{35.2}$$

et les fonctions $F_1(q)$ et $F_2(q)$ sont de classe H-L. L'indice supplémentaire (0 ou 1) de l'opérateur des contraintes correspond à l'indice des coefficients de Lamé. V. Kupradze, T. Guéguélia et autres [1] donnent à ce problème le nom de *problème principal de contact.*

Conformément à l'article de P. Perline [7], modifions la position du problème, mettant à profit le fait que les coefficients de Poisson des milieux élastiques sont identiques. Remplaçons dans l'un des domaines, dans $D^+$ par exemple, le milieu élastique par un corps avec les mêmes constantes que dans $D^-$, tout en conservant les déplacements inchangés. L'opération est parfaitement légitime puisque les équations homogènes de Lamé ne contiennent que le coefficient de Poisson. L'équation (35.2) prend alors la forme

$$T_{1n}U_1(q) - kT_{1n}U_0(q) = F_2(q), \tag{35.3}$$

tandis que l'équation (35.1) reste inchangée.

Tout d'abord, pour simplifier le problème prenons le potentiel de couche double $W(p, {}^1/_2F_1)$ et considérons les déplacements $\widetilde{U}_1 = U_1(p) - W(p, {}^1/_2F_1)$ et $\widetilde{U}_0(p) = U_0(p) - W(p, {}^1/_2F_1)$. Il est aisé de voir que ces valeurs des déplacements vérifient identiquement l'équation (35.1). L'équation (35.3), elle, prend la forme

$$T_{1n}\widetilde{U}_1(q) - kT_{2n}\widetilde{U}_0(q) = F_2(q) + kT_{1n}^{+}W - T_{1n}^{-}W = F_3(q). \tag{35.4}$$

Ainsi donc, les nouveaux déplacements $\widetilde{U}_1(p)$ et $U_0(p)$ représentent des fonctions continues dans tout l'espace et telles que les valeurs limites de l'opérateur des contraintes sont liées par la relation (35.4).

Introduisons sur la surface $S$ la fonction auxiliaire $\varphi(q)$ qu'on définit de la manière suivante:

$$T_{1n}\widetilde{U}_1(q) - T_{1n}\widetilde{U}_0(q) = 2\varphi(q). \tag{35.5}$$

Si la fonction $\varphi(q)$ était connue, la solution du problème se représenterait sous forme de potentiel de couche simple :

$$V(p, \varphi) = \int_S \Gamma(p, q)\varphi(q)\, dS_q. \tag{35.6}$$

Nous supposerons cette fonction conventionnellement donnée. Déterminant les valeurs limites de l'opérateur des contraintes des différents côtés de la surface $S$ et les portant dans la relation (35.4), nous serons conduits à une équation intégrale pour la fonction $\varphi(p)$ :

$$\varphi(q) - \frac{1-k}{1+k}\int_S \Gamma_1(q, q')\varphi(q')\, dS_{q'} = \frac{1}{1+k} F_3(q). \tag{35.7}$$

Des équations de cette classe ont été étudiées au § 29. Comme $\nu_0 = \frac{1-k}{1+k} < 1$, l'équation (35.3) s'avère toujours résoluble et, de plus, justiciable de la méthode des approximations successives (cf. V. Kupradze [3]). La réalisation de cette méthode peut être effectuée à l'aide des représentations régulières introduites au § 31. Le fait que le paramètre $\nu_0 < 1$ garantira une convergence rapide et stable de l'algorithme.

Abandonnons maintenant l'hypothèse du corps illimité et supposons que le corps élastique de paramètres $\lambda_1$ et $\mu_1$ est limité par une certaine surface $S_1$ (on peut supposer de même que le corps élastique de paramètres $\lambda_0$ et $\mu_0$ est limité de l'intérieur par une certaine surface $S_0$). Reprenant les raisonnements précédents (compte tenu du § 29), nous parvenons à un système d'équations intégrales singulières

$$\varphi(q) - \nu_0 \int_S \Gamma_1(q, q')\varphi(q')\, dS_{q'} + \frac{1}{(1+k)}\int_{S_1} \Gamma_1(q, q')\varphi_1(q')\, dS_{q'} = \frac{1}{(1+k)} F_3(q) \quad (q \in S), \tag{35.8}$$

$$\varphi_1(q) + \int_S \Gamma_1(q, q')\varphi(q')\, dS_{q'} + \int_{S_1} \Gamma_1(q, q')\varphi_1(q')\, dS_{q'} = F_4(q) \quad (q \in S_1). \tag{35.9}$$

Plus haut on supposait données sur la surface $S_1$ les contraintes $F_4(q)$, ce qui dictait le choix de la représentation de la solution sous forme de potentiel de couche simple. Les équations (35.8) et (35.9) ressemblent aux équations obtenues au § 34 pour un corps délimité par deux surfaces.

On peut aborder le calcul des équations intégrales (35.7) en partant des équations fonctionnelles générales pour un milieu homogène par morceaux, valables pour le cas de différents coefficients de Pois-

son également (cf. V. Kupradze [3]). Notons qu'en s'appuyant sur ces équations l'auteur a démontré la résolubilité des problèmes physiques initiaux.

Passons à la considération du cas général (cas de coefficients de Poisson différents) et supposons qu'on a un domaine $D$, délimité par des surfaces régulières $S_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots, m$), dont l'une, $S_0$, englobe toutes les autres. Le domaine $D$ est rempli d'un milieu élastique dont les constantes de Lamé sont $\lambda_0$ et $\mu_0$, et les domaines $D_n^+$, disposés à l'intérieur des surfaces $S_n$, de milieux avec pour constantes de Lamé $\lambda_n$ et $\mu_n$ ($n = 1, 2, \ldots, m$). Des conditions de type (29.1) et (29.2) sont réalisées sur les surfaces de contact; sur la surface $S_0$ sont données les conditions du premier ou du second problème fondamental. Désignons sur les surfaces $S_n$ les vecteurs des contraintes par $t_n^\pm(q)$ et les vecteurs des déplacements par $U_n^\pm(q)$. Appliquons, comme l'ont fait F. J. Rizzo et D. J. Shippy * [1], à chacun des domaines $D_n$ la relation (31.5) découlant de la formule de Betti (dans sa forme générale et modifiée au cas de plusieurs surfaces). Nous obtenons alors

$$U_n^+(q) - \int_{S_n} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_n^+(q')\, dS_{q'} = \int_{S_n} \Gamma(q, q')\, t_n^+(q')\, dS_{q'} \quad (n \leqslant m),$$

$$U_n^-(q) + \int_{S_n} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_n^-(q')\, dS_{q'} -$$

$$- {\sum_{j=1}^{m}}' \int_{S_j} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_j^-(q')\, dS_{q'} - \int_{S_0} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_0^+(q')\, dS_{q'} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \Gamma(q, q')\, t_j^-(q')\, dS_{q'} +$$

$$+ \int_{S_0} \Gamma(q, q')\, t_0^+(q')\, dS_{q'} \quad (n = 1, 2, \ldots, m), \qquad (35.10)$$

$$U_0^+(q) + \sum_{j=1}^{m} \int_{S_j} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_j^-(q')\, dS_{q'} -$$

$$- \int_{S_0} \Gamma_2^{\mathrm{I}}(q, q')\, U_0^+(q) = \int_{S_0} \Gamma(q, q')\, t_0^+(q')\, dS_{q'}.$$

Le cran sur $\Sigma$ signifie l'omission du $n$-ième terme.

Complétons le système obtenu par deux équations de type (35.1) et (35.2). Nous obtenons alors finalement un système d'ordre $4m + 1$ qui, grâce à la simplicité des relations (35.1) et (35.2), se simplifie d'emblée et se ramène à un système d'ordre $2m + 1$. Il est évident

que l'abaissement de l'ordre des inconnues peut être réalisé de différentes façons, conduisant aussi bien à des équations régulières de première espèce qu'à des équations singulières de deuxième espèce.

Le cas du problème plan est envisagé en détail dans ce même travail. Les auteurs mettent à profit la représentation (29.19). Les calculs sont conduits selon le schéma qui est le développement du travail de F. J. Rizzo * [1]. Citons quelques résultats énoncés dans cet article. Les auteurs ont traité le problème relatif à la détermination de l'état de contrainte dans un plan comportant un trou elliptique

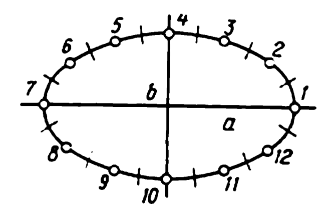



Fig. 19. Lame illimitée comportant une inclusion elliptique.

dans lequel on insère avec serrage une rondelle elliptique faite dans le même matériau (fig. 19). La figure montre la partition du contour en arcs élémentaires et le choix de points centraux dans le cas de douze tronçons d'arc.

Les valeurs de l'erreur relative de calcul des composantes du déplacement normales au contour ($\Delta_1$) et de la contrainte ($\Delta_2$) aux points 1 et respectivement 4, 7, 13 pour un nombre de tronçons $n = 12, 24, 48$ sont réunies sur le tableau 5. L'erreur est déterminée

*Tableau 5*

**Erreurs de calcul des déplacements et des contraintes pour un plan comportant une inclusion elliptique**

| Points | $\Delta_1$ | | | $\Delta_2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 12 | 24 | 48 | 12 | 24 | 48 |
| 1 | 0,0220 | 0,0115 | 0,0055 | 0,1560 | 0,0426 | 0,0113 |
| 4 | 0,0160 | | | 0,0266 | | |
| 7 | | 0,0095 | | | 0,0133 | |
| 13 | | | 0,0005 | | | 0,0066 |

par rapport à la solution exacte (cf. D. Sherman [5]) et représentée en fractions du déplacement maximal et de la contrainte maximale. On adopte dans les calculs le coefficient de Poisson égal à $\nu = 1/3$. Le serrage a été déterminé par l'agrandissement des demi-axes proportionnel à leurs dimensions. Le rapport des demi-axes est $a/b = 2$.

Les auteurs ont traité également le problème d'une matrice limitée de l'extérieur par un cercle de rayon $R$ et comportant une pièce elliptique (fig. 20). Comme précédemment, la pièce d'inclusion et la

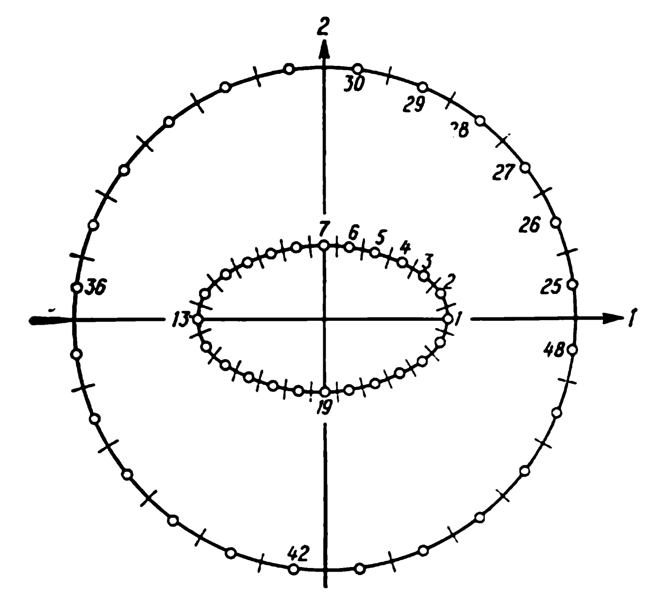



Fig. 20. Lame circulaire comportant une inclusion elliptique

matrice sont de même matériau. Les valeurs des projections, sur les axes 1 et 2, des vecteurs des déplacements et des contraintes sur la frontière de séparation et la frontière extérieure sont présentées

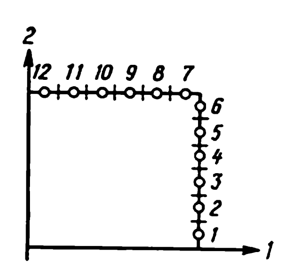



Fig. 21. Lame comportant une inclusion carrée.

dans le tableau 6. Ces valeurs sont données en fractions des déplacements et des contraintes maximaux, correspondant au cas où le contour extérieur fait défaut ($R/a = \infty$). Tous les autres paramètres sont les mêmes qu'au problème précédent.

*Tableau 6*

**Déplacements et contraintes pour un disque avec une pièce d'inclusion elliptique**

| Points | $u_1$ | $u_2$ | $\sigma_n$ | $\tau_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $R/a=2$ | | | | |
| 1 | 0,623 | 0,000 | 0.9115 | 0,0000 |
| 2 | 0,577 | 0.421 | 0.7396 | 0.3414 |
| 3 | 0,481 | 0,718 | 0,4911 | 0,4650 |
| 4 | 0,368 | 0.920 | 0.3239 | 0.5065 |
| 5 | 0,249 | 0.048 | 0.1983 | 0,5243 |
| 6 | 0,125 | 1,121 | 0,0968 | 0.5338 |
| 7 | 0,000 | 1.146 | 0.0000 | 0.5341 |
| 25 | 0,217 | 0.044 | 0,0000 | 0.0000 |
| 26 | 0,255 | 0.154 | 0.0000 | 0,0000 |
| 27 | 0,281 | 0,288 | 0,0000 | 0,0000 |
| 28 | 0,256 | 0.488 | 0.0000 | 0.0000 |
| 29 | 0,178 | 0,585 | 0.0000 | 0,0000 |
| 30 | 0,064 | 0.632 | 0,0000 | 0.0000 |

| Points | $u_1$ | $u_2$ | $\sigma_n$ | $\tau_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $R/a=5$ | | | | |
| 1 | 0,627 | 0.000 | 0.9581 | 0.0000 |
| 7 | 0.000 | 0,669 | 0.0000 | 0.6369 |
| $R/a=\infty$ | | | | |
| 1 | 0,634 | 0,000 | 0,9660 | 0,0000 |
| 7 | 0.000 | 1.014 | 0,0000 | 0,6574 |
| Solution exacte ($R/a=\infty$) | | | | |
| 1 | 0.615 | 0,000 | 1,0000 | 0.0000 |
| 7 | 0,000 | 1.000 | 0,0000 | 0,6677 |

Les auteurs ont traité en outre le problème relatif à un plan infini comportant un trou carré dans lequel est introduite avec serrage une pièce de même matériau et de matériau, dont le module d'élasticité est trois fois plus grand que celui du matériau principal (fig. 21). La partition du contour en segments de même longueur a été réalisée de façon que le premier point central soit le plus proche de l'axe de symétrie (sans coïncider avec celui-ci). Il est exigé en outre que le point anguleux ne soit pas point central. Sur le tableau 7 sont données

*Tableau 7*

**Contraintes dans une lame infinie comportant une inclusion carrée (la lame et la pièce sont faites dans le même matériau)**

| Points | $\sigma_n$ | $\tau_n$ | $\sigma_\theta$ | $\sigma_\theta'$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,987 (0,012) | 0,061 (0,000) | 1,831 (0,005) | 1,005 (0.005) |
| 2 | 0.992 (0.011) | 0,185 (0,000) | 1,827 (0,003) | 1,008 (0.005) |
| 3 | 0,998 (0.013) | 0,327 (0,000) | 1,819 (0,0005) | 1,016 (0,005) |
| 4 | 1,009 (0.013) | 0,501 (0,002) | 1,808 (0,003) | 1,027 (0,005) |
| 5 | 1,026 (0,011) | 0,726 (9,027) | 1,805 (0,008) | 1,028 (0,008) |
| 6 | 0,988 (0,065) | 0,525 (0,256) | 1,810 (0,028) | 1,024 (0,030) |

les valeurs des composantes normale et tangentielle des contraintes de contact, ainsi que les valeurs de la composante tangentielle dans la pièce d'inclusion ($\sigma_\theta$) et dans la matrice ($\sigma'_\theta$) quand les modules d'élasticité coïncident. Toutes les grandeurs sont adimensionnées (divisées par la composante normale des contraintes au point 1, déterminée de la solution analytique). Les serrages sont donnés identiques dans les deux directions. On indique entre parenthèses l'erreur relative déterminée d'après la solution exacte (en fractions de la même composante de la contrainte normale). Le coefficient de Poisson est égal à $\nu = 0{,}25$.

*Tableau 8*

**Contraintes dans une lame infinie comportant une inclusion carrée (la lame et la pièce sont en matériaux différents)**

| Points | $\sigma_n$ | $\tau_n$ | $\sigma_\theta$ | $\sigma'_\theta$ | Points | $\sigma_n$ | $\tau_n$ | $\sigma_\theta$ | $\sigma'_\theta$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,142 | 0,092 | 2,531 | 1,738 | 4 | 1,225 | 0,765 | 2,618 | 1,691 |
| 2 | 1,153 | 0,285 | 2,541 | 1,732 | 5 | 1,307 | 1,100 | 2,765 | 1,623 |
| 3 | 1,177 | 0,499 | 2,565 | 1,719 | 6 | 1,659 | 2,405 | 2,776 | 1,541 |

On présente dans le tableau 8 les résultats de calculs analogues effectués pour un module d'élasticité de la pièce d'inclusion trois fois plus grand que celui du domaine principal (de la matrice). Pour faciliter la comparaison des résultats toutes les grandeurs sont données sans dimension (en fractions de la même grandeur qu'au tableau précédent).

Le cas d'un domaine borné comportant une seule surface de séparation est considéré dans l'article de M. Basheleïshvili et T. Guéguélia [1], où les contraintes sont supposées données sur la surface extérieure. Moyennant un choix adéquat de représentations pour les déplacements dans chaque domaine, les auteurs obtiennent et étudient un système d'équations intégrales singulières par rapport à quatre fonctions inconnues. Ils démontrent par ailleurs l'applicabilité des alternatives de Fredholm à ces équations.

Les problèmes sont en principe plus complexes dans le cas où la surface de séparation émerge sur la frontière. De toute évidence, les méthodes exposées précédemment peuvent être (avec certaines hypothèses) utilisées pour la résolution de ces problèmes, à condition d'analyser les singularités des états de contrainte et de déformation dans le voisinage des courbes singulières d'intersection de la surface extérieure avec la surface de coupure. Notons qu'au § 22 ce problème dans sa position plane a été résolu.

Considérons un cas particulier, mais d'importance primordiale pour les applications où toutes les constantes élastiques sont identi-

ques. Par souci de simplicité nous admettrons la présence d'une seule pièce d'inclusion. En partant des conditions

$$U_0(q) - U_1(q) = F_1(q), \qquad (35.11)$$
$$T_n U_0(q) - T_n U_1(q) = 0 \quad (q \in S_1),$$

nous pouvons supposer à présent que la surface $S_1$ n'est pas fermée, ses bords émergeant sur la surface $S$. Des problèmes de ce genre se posent, en particulier, dans les applications techniques, quand un corps (de dimension légèrement supérieure) est introduit dans la cavité d'un autre.

Le potentiel de couche double sera de la forme $W(p, 1/2\ F_1)$. Vu (28.10), les déplacements

$$U(p) = U_0(p) - W(p, {}^1/_2\ F_1) \quad (p \in D), \qquad (35.12)$$
$$U(p) = U_1(p) - W(p, {}^1/_2\ F_1) \quad (p \in D_1^+)$$

vérifieront les équations de Lamé dans tout le domaine global. Les conditions aux limites sont déterminées aussi bien au moyen des conditions données par la position du problème que par le potentiel $W(p, {}^1/_2\ F_1)$. Après avoir résolu de telle ou telle façon le problème posé, il faut revenir aux déplacements $U_0(p)$ et $U_1(p)$ selon (35.12) *). Une certaine complexité surgit lors de la détermination des contraintes sur la surface de contact, puisque dans ce cas il est nécessaire de calculer l'opérateur des contraintes du potentiel de couche double. A l'aide des représentations régulières (31.17) on peut déterminer les déplacements et de ceux-ci passer aux contraintes. On peut également utiliser le procédé d'extrapolation qui sera étudié en détail au § 36.

V. Poloukhine, V. Kostylev et N. Andrianov [1] ont traité le problème à symétrie axiale, qui se pose lorsqu'on calcule l'état de contrainte d'arbres frettés de laminoirs ébaucheurs, obtenus par l'ajustage à chaud d'un cylindre creux (bandage) sur un cylindre plein de

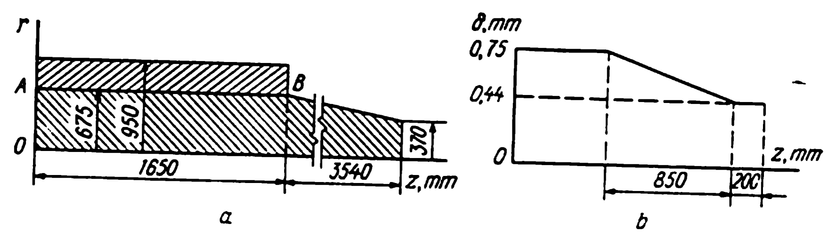



Fig. 22. Section d'un quart d'un arbre composé (*a*). Profil de l'axe δ de l'arbre (*b*).

*) Attirons l'attention sur la ressemblance de ce procédé et de l'approche développée au § 22 relativement au problème plan.

diamètre variable (axe de l'abre). Le saut de la composante normale des déplacements se donne par les dimensions initiales des corps. Si, au cours du refroidissement, avait lieu prise intégrale, alors il n'était pas difficile, à partir de la grandeur du coefficient de dilatation linéaire, de déterminer le saut de la composante tangentielle des déplacements: la grandeur du saut varierait suivant une loi linéaire. Cependant, comme le montrent les expériences, il peut y avoir glissement sur la surface de contact. C'est pourquoi les auteurs ont admis

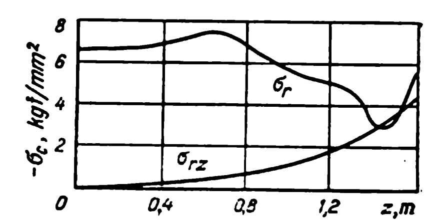



Fig. 23. Contraintes de contact.

que le saut est une fonction linéaire (comme en cas de prise) de la coordonnée axiale, mais deux fois plus petite.

Sur la fig. 22, *a* et *b* sont représentés la coupe de l'arbre composé et le profil de son axe (i.e. la grandeur du saut de la composante normale des déplacements). Sur la fig. 23 sont représentés les diagrammes des contraintes de contact et sur la fig. 24, les diagrammes des contraintes dans l'axe de l'arbre et dans le bandage dans quatre sections: *1* — centrale, *2*, *3* et *4* à la distance de 650, 1150 et 1450 mm de la section centrale.

Remarquons que dans le cas où la surface de contact des corps est cylindrique et seule la composante normale des déplacements subit un saut (de grandeur constante), le passage au problème d'un corps plein peut être réalisé d'emblée en superposant la solution du problème de Lamé. Un exemple de problème de ce genre est illustré par la fig. 25. Donnons à titre d'exemple la solution du problème suivant. Dans des conditions de déformation plane, on considère un trou circulaire de rayon $R$, dans lequel est introduit avec serrage $\delta$ un disque de même matériau. Les contraintes dans le disque sont alors

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\delta}{R}; \quad \sigma_z = -\frac{2\mu\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\delta}{R} \qquad (35.13)$$

et dans le plan

$$\sigma_r = -\sigma_\theta = -\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\frac{\delta R}{r^2}; \quad \sigma_z = 0. \qquad (35.14)$$

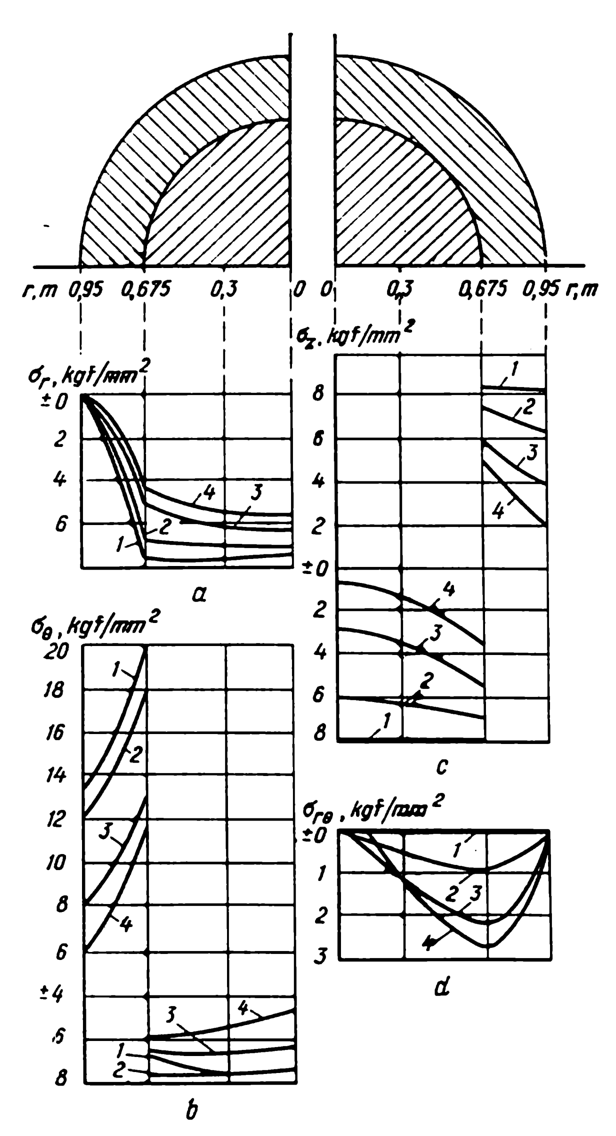



Fig. 24. Diagrammes des contraintes d'un arbre composé dans les sections: *1* — centrale, *2*, *3*, *4* — à une distance de 650; 1150 et 1450 mm de la section centrale.

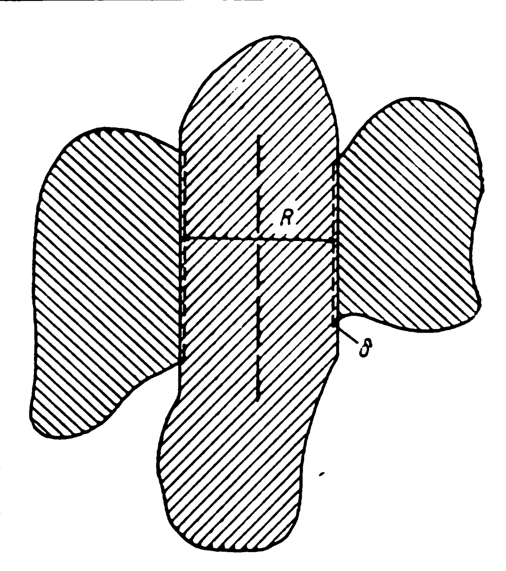



Fig. 25. Section d'un corps composé dans le cas où un serrage de grandeur constante est réalisé suivant une surface cylindrique.

En superposant les solutions (35.13) et (35.14) à la solution recherchée du corps composé nous parvenons au problème d'un corps plein avec des conditions aux limites modifiées.

## § 36. Problèmes spatiaux de la théorie de l'élasticité pour des corps présentant des coupures

Les problèmes spatiaux de la théorie de l'élasticité pour des corps limités par des surfaces régulières ont été considérés aux paragraphes précédents. Abordons maintenant l'étude du cas particulier d'un corps élastique (fini ou illimité) présentant une coupure sous la forme d'une surface non fermée de Liapounov $S$. En général, il convient de considérer $S$ comme une surface à deux faces, notant l'une d'elles $S^+$ et l'autre $S^-$, dont les points correspondants sont $q^+$ et $q^-$ (le sens positif de la normale est choisi du côté de $S^-$). Notons par ailleurs $L$ le contour régulier délimitant la surface $S$.

Donnons la formulation du deuxième problème fondamental. Soit à définir dans tout l'espace le vecteur de déplacement élastique $U(p)$ vérifiant la condition aux limites

$$\lim_{p\to q^+} T_n U(p) = f^+(q^+), \quad \lim_{p\to q^-} T_n U(p) = f^-(q^-), \qquad (36.1)$$

supposant les fonctions $f^+(q^+)$ et $f^-(q^-)$ données et de classe H-L. On suppose en outre qu'à l'infini les contraintes font défaut. Si, au contraire, les contraintes ne sont pas nulles à l'infini, alors il est aisé de passer au cas considéré en superposant la solution triviale pour un corps continu.

Formons le potentiel de couche simple $V(p, f_1)$ avec la densité $f_1(q) = 0{,}5\,[f^+(q^+) - f^-(q^-)]$. On peut montrer que le déplacement $U_1(p) = U(p) - V(p, f_1)$ vérifie les mêmes conditions aux limites (en contraintes) sur la surface $S$. C'est pourquoi nous supposerons cette transformation réalisée et nous allons résoudre le problème aux limites pour des fonctions $f^+(q^+)$ et $f^-(q^-)$ égales entre elles, tout en omettant l'indice dans les conditions (36.1).

Nous chercherons à présent le déplacement sous la forme de potentiel de couche double de première espèce, réparti sur la surface $S$ *):

$$U_1(p) = W(p) = \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q. \qquad (36.2)$$

Comme on sait, le potentiel $W(p)$ vérifie les équations de Lamé dans tout le corps élastique et les valeurs limites des contraintes qu'il engendre des différents côtés de la surface coïncident entre elles (dans l'hypothèse qu'elles existent) (cf. § 28). Ainsi, la résolution du problème de la théorie de l'élasticité se ramène à la résolution de l'équation fonctionnelle

$$\lim_{p\to q^{\pm}} T_n \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q = f(q^{\pm}). \qquad (36.3)$$

Remarquons que la densité $\varphi(q)$ cherchée est égale à la moitié du saut des déplacements sur la surface $S$.

Réalisons la discrétisation de la surface $S$ en la découpant en petits triangles $S_j$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$. Choisissons au centre de chacun des domaines $S_j$ un point qui, selon la terminologie introduite au § 33, sera dit point d'appui et désigné par $p_j$. Nous supposerons la densité constante (dans les limites de chacun des domaines partiels $S_j$) en lui attribuant la valeur qu'elle a au point $p_j$ $(\varphi(p_j) = \varphi_j)$. Passons au calcul du premier membre de l'équation (36.3) en chaque point d'appui. La somme intégrale correspondante doit être de la forme

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk}\varphi_k.$$

Chaque terme de cette somme représente le produit d'une matrice de troisième ordre $\alpha_{jk}$ par le vecteur $\varphi_k$. Pour former cette somme on doit procéder de la façon suivante. On se donne au point $p_j$ un vecteur $\varphi_j^1$, dont la première composante vaut l'unité et les deux autres zéro. En tous les autres points toutes les composantes du vecteur $\varphi$ sont supposées nulles. Par des calculs (dont on parlera plus bas) on trouvera les premières lignes des matrices $\alpha_{jk}$ $(k = 1, 2, \ldots, N)$. Supposant ensuite seule la deuxième composante, notée $\varphi_j^2$, différente de zéro (et égale à l'unité), nous parvenons respectivement à la

*) Ce procédé est la généralisation du procédé proposé par F. G. Tricomi *[1] pour la résolution de problèmes harmoniques analogues.

seconde ligne de ces matrices, puis à l'aide du vecteur $\varphi_j^3$ à la troisième ligne. Il est évident qu'il faut effectuer ces calculs pour tous les points $p_j$ l'un après l'autre.

Des difficultés de principe n'apparaissent que pour la détermination des matrices $\alpha_{jj}$ du fait de l'impossibilité d'introduire l'opérateur $T_n$ sous le signe d'intégration. Les autres matrices peuvent toutefois être calculées à l'aide d'une formule d'intégration appropriée. Il convient de prendre en considération, il est vrai, le fait que si les indices $j$ et $k$ sont tels que la distance entre les points $p_j$ et $p_k$ est commensurable avec le diamètre du domaine $S_j$, alors, pour élever la précision, une subdivision (plus fine) du domaine $S_j$ s'impose. On appliquera les mêmes formules d'intégration à des domaines plus petits, en conservant, bien entendu, la densité constante dans les limites de la division de départ. Les dimensions de ces domaines partiels sont établies au cours des calculs, en fonction de la précision à atteindre sur les valeurs des coefficients à déterminer.

Passons au point le plus délicat du schéma de calculs, à savoir le calcul des matrices $\alpha_{jj}$, et indiquons les procédés proposés par différents auteurs pour déterminer ces coefficients.

L'une des recommandations (cf. P. Perline, V. Samarov [1, 2]) consiste à abaisser en chaque point d'appui $p_j$ une perpendiculaire à la surface et à porter sur celle-ci quelques points dans le voisinage de la coupure qu'on désigne par $p_j^l$ (l'indice supérieur « $l$ » donne la distance du point $p_j^l$ au point $p_j$).

Il est aisé de construire en chacun des points auxiliaires une matrice $\alpha_{jj}^l$ du potentiel étendu à $S_j$ et de densité unitaire (pour chacune des composantes l'une après l'autre). Naturellement, l'application des formules d'intégration les plus simples conduira à une erreur importante dans le cas d'une valeur petite de $l$. Aussi pour atteindre la précision voulue doit-on s'aider du procédé décrit plus haut consistant en une division complémentaire du domaine $S_j$ en domaines partiels. Ayant construit une famille de telles matrices (la précision voulue étant garantie), on propose de déterminer la matrice cherchée $\alpha_{jj}$ à l'aide d'une extrapolation quelconque (polynomiale par exemple), sur $l$.

Il est clair que pour déterminer les valeurs des matrices $\alpha_{jj}$ avec la précision exigée il faut choisir les points $p_j^l$ suffisamment près du point $p_j$, leur nombre et disposition devant assurer la crédibilité de l'extrapolation. (C'est pour simplifier les calculs que les points $p_j^l$ sont choisis sur les normales.)

Les auteurs ont présenté les résultats d'un calcul effectué pour un modèle, à savoir un carré plan de côté égal à l'unité sur lequel est donnée une fonction vecteur, dont les deux composantes tangentielles sont nulles et la composante normale égale à l'unité. Cette fonction est interprétée comme la densité d'un potentiel de couche double.

*Tableau 9*

**Composante normale des contraintes en fonction de la distance à la surface pour différentes partitions auxiliaires**

| $n$ \ $l$ | 0,40 | 0,20 | 0,15 | 0,10 | 0,05 |
|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 1,78139 | 1,66073 | 1,63240 | 1,60990 | 0,51901 |
| 90 | 1,78159 | 1,66085 | 1,63255 | 1,61014 | 1,57513 |
| 120 | 1,78159 | 1,66093 | 1,63260 | 1,61023 | 1,59691 |
| 180 | | | | | 1,59615 |

Puis aux points disposés sur la normale passant par le centre du carré on a déterminé les contraintes engendrées par ce potentiel. Pour les points choisis, qu'on caractérise par la distance $l$ du plan du carré, les calculs ont été effectués pour différentes divisions auxiliaires de plus en plus fines (en $n^2$ parties égales) du carré principal. Les résultats des calculs correspondants sont présentés dans le tableau 9. Il apparaît de ces données qu'aussi petite que soit la distance du point de la surface on peut, au compte d'une division complémentaire (suffisamment fine), obtenir des valeurs stables de contraintes.

Ensuite le processus d'extrapolation est lui-même étudié pour différentes combinaisons et quantités de points $l_i$. Les valeurs obtenues pour la composante normale de la contrainte sont présentées dans le tableau 10.

*Tableau 10*

**Valeurs limites des contraintes en fonction du nombre et de la disposition des points auxiliaires pour différentes partitions auxiliaires**

| $n$ \ $l_i$ | 0,4; 0,3; 0,2 | 0,4; 0,3; 0,2; 0,1 | 0,4; 0,3; 0,2; 0,1; 0,05 |
|---|---|---|---|
| 30 | 1,55197 | 1,59238 | |
| 60 | 1,55195 | 1,59315 | 1,54165 |
| 120 | 1,55200 | 1,59388 | 1,59138 |
| 180 | | | 1,59205 |

Analysant ces données on peut juger également de la stabilité de l'algorithme proposé en utilisant, bien entendu, seules les valeurs des contraintes qui sont confirmées par des calculs avec une division plus fine.

La réalisation du calcul correspondant en chaque point d'appui (surtout, si les domaines $S_j$ sont différents) exige certes beaucoup d'efforts, mais il est à remarquer qu'il est possible, à des fins prati-

ques, de choisir les points auxiliaires une fois pour toutes partant de l'analyse des cas modèles (par exemple, l'élément en forme de carré comme plus haut).

Par conséquent, le problème se ramène finalement à la résolution d'un système d'équations algébriques

$$\sum_{k=1}^{N} \alpha_{jk}\varphi_k = f(p_j) \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{36.4}$$

Le système (36.4) s'avère, comme on a établi dans quelques cas particuliers, un système assez bien conditionné et justiciable, paraît-il, de la méthode des approximations successives.

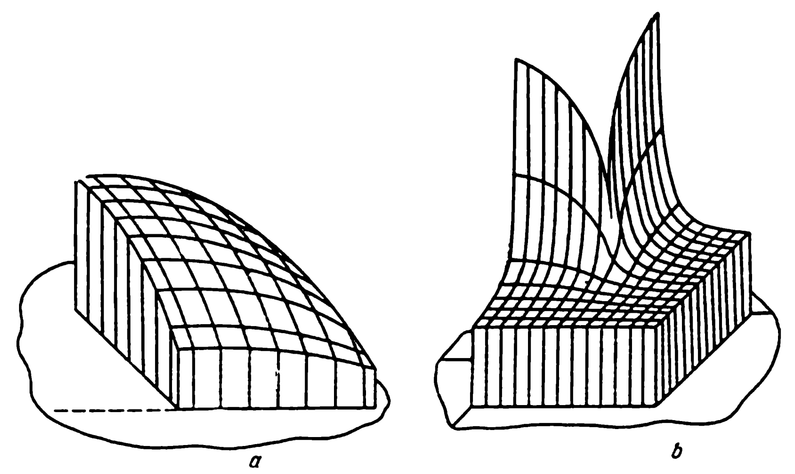



Fig. 26. Espace présentant une coupure en forme de rectangle. Valeurs de déplacements sur la surface de la coupure (*a*), contraintes normales dans le plan de la coupure (*b*).

Un autre procédé d'élaboration du système (36.4) est proposé dans l'article de B. Zinoviev [1]. L'auteur considère dans l'espace un carré plan, fixant sur celui-ci un effort réparti uniformément. Intégrant la solution de Kelvin-Somigliana il obtient sous forme explicite l'expression des contraintes dans tout l'espace, y compris leurs valeurs limites prises de différents côtés du carré en son centre. Par sommation des solutions obtenues dans le cas de deux carrés disposés l'un à côté de l'autre, et passage à la limite quand la distance entre les carrés tend vers zéro et les efforts vers l'infini (de sorte que le produit reste constant) on obtient effectivement la valeur exacte de l'opérateur $T_n$ lorsque la densité est un vecteur unité et la surface $S_j$ un carré plan. A titre d'exemple, la coupure était prise au départ sous forme de rectangle plan dont les côtés se rapportent comme 2 : 1. Sur la figure 26 sont montrées les valeurs de la densité (c'est-à-dire

des déplacements) aux points de la coupure (*a*) *) et les valeurs des contraintes normales aux points du corps élastique se trouvant sur le prolongement de la coupure (*b*).

Le cas d'une coupure plane est également considéré dans l'article de H. Nisitani et Y. Murekami * [1]. Les raisonnements des auteurs consistent en ce qui suit. Soit une coupure plane elliptique. La solution du problème pour l'espace présentant une coupure elliptique dans le cas d'une pression hydrostatique est connue (cf. A. Lourié [1]). On résout le problème numériquement pour une pression normale arbitraire donnée (remarquons que la présence d'un plan de symétrie entraîne l'égalité à zéro des composantes tangentielles des vecteurs $\varphi_j$). Ayant réalisé d'une façon quelconque la partition de la surface de la coupure on passe à l'établissement du système (36.4). Pour trouver les matrices diagonales $\alpha_{jj}$ les auteurs agissent de la façon suivante : ils considèrent le problème pour le cas où la solution est connue sous forme explicite et trouvent l'élément diagonal, ayant profité du fait que tous les éléments non diagonaux sont calculés sans difficultés; les valeurs des nombres $\varphi_k$ sont fournies par la solution exacte.

Il est naturel d'escompter que les algorithmes proposés conduiront à un schéma de calcul facile à réaliser, à condition de supposer, dans les limites de domaines élémentaires suffisamment grands, les densités constantes. Une telle hypothèse n'est logique que pour les domaines intérieurs, si l'on suppose que la courbure de la surface et la charge varient relativement peu. Par contre, dans la bande étroite attenant au contour $L$, la solution change de façon notable.

Utilisons un résultat connu en théorie de l'élasticité (cf. § 17). à savoir que l'état de contrainte au voisinage du bord d'un domaine en forme de coin se décrit de façon satisfaisante par les solutions asymptotiques tirées des problèmes plan et de torsion correspondants. Isolons sur la surface $S$ une bande annulaire $S_\delta$ dans laquelle la solution est représentée à l'aide des solutions mentionnées, introduites dans un système local de coordonnées choisi suivant la normale et la tangente au contour de la coupure, avec un certain facteur de proportionnalité variant le long du contour (cf. P. Perline, V. Samarov [1, 2]). Ce facteur est déterminé de telle sorte qu'au point d'appui le plus proche (sur la normale au contour) de la partie restante du domaine $S^* = S \setminus S_\delta$ le saut des déplacements, tiré de la solution analytique, coïncide avec la valeur conventionnellement donnée 0,5 $\varphi_j$. Dans ce cas tous les calculs ne sont effectués qu'aux points d'appui de la zone $S^*$, tandis que l'intégration est étendue à tout le domaine $S$. Après avoir résolu le système (36.4) (plus précisément, sa modification), on détermine analytiquement les déplacements dans la bande.

*) D'après la position du problème la densité doit s'annuler aux points du contour $L$.

Illustrons l'exposé sur l'exemple d'un problème à symétrie axiale pour une coupure circulaire de rayon $R$. La surface est partitionnée en domaines élémentaires par un système de rayons équidistants et de circonférences concentriques, les points d'appui sont pris dans leurs centres (dans un système de coordonnées polaire). Dans l'anneau $S_\delta$ la solution est choisie sous la forme $\varphi(\rho) = \varphi_k \sqrt{(R-\rho)/(R-\rho_k)}$, où $k$ est l'indice du point d'appui, situé dans le domaine $S^*$ et le plus proche de $S_\delta$, $\rho$ et $\rho_k$ la distance des points courants $p$ et $p_k$ du centre (en raison de la symétrie axiale, toutes les constructions sont effectuées dans un seul secteur). Comme montrent les données des calculs effectués pour le cas où la charge est une pression hydrostatique (cf. le tableau 11), le recours à des solutions asymptotiques

*Tableau 11*

**Valeurs de la composante normale des déplacements sur la surface d'une coupure circulaire**

| $\rho$ | 1 | 1/30 | 5/30 | 10/30 | 15/30 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_{calc}$ | 1,10864 | 1,10203 | 1,09527 | 1,05008 | 0,95484 |
| $\varphi_{exact}$ | 1,09645 | 1,09430 | 1,08020 | 1,06370 | 0,96118 |

| $\rho$ | 20/30 | 25/30 | 28/30 | 29/30 |
|---|---|---|---|---|
| $\varphi_{calc}$ | 0,82501 | 0,58735 | 0,35894 | 0,20987 |
| $\varphi_{exact}$ | 0,82030 | 0,59326 | 0,36148 | 0,21051 |

a permis d'élever la précision de 5 % à 1,5 % pour une même partition de la surface.

Reportons-nous maintenant à l'étude des problèmes concernant un corps élastique limité. Deux cas sont à envisager. Dans le premier on suppose la surface de coupure disposée à l'intérieur du corps élastique, dans le second qu'elle émerge en partie à la surface extérieure $S_1$. Bien que dans les cas indiqués le travail qu'exige la résolution s'accroisse considérablement, il ne faut pas exagérer l'importance des difficultés de principe qui apparaissent. A la différence du problème considéré précédemment pour l'espace illimité, la représentation du déplacement est ici de la forme

$$U(p) = \int_S \Gamma_2^{\mathrm{I}}(p, q)\,\varphi(q)\,dS_q + H(p), \tag{36.5}$$

où le terme $H(p)$ est un potentiel de couche simple ou double étalée sur la surface $S_1$ (en fonction de la nature de la condition aux limites

sur celle-ci). Supposant ensuite que sont données les contraintes $f_1(q)$, représentons la condition aux limites sur la surface $S_1$ au moyen de la fonction $\varphi(q)$, la supposant conventionnellement donnée

$$\varphi_1(q)+\int_{S_1}\Gamma_1(q,\ q')\,\varphi_1(q')\,dS_{q'}=$$
$$=f_1(q)-\int_{S}T_n\Gamma_2^{\mathrm{I}}(q,\ q')\,\varphi(q')\,dS_{q'}\quad(q\in S_1).\quad(36.6)$$

Si la surface $S$ est partagée en $N$ domaines élémentaires $S_j$, alors il est nécessaire de résoudre $3N$ problèmes aux limites (c'est-à-dire $3N$ équations de la forme (29.3)) pour un domaine continu, posant différente de zéro l'une après l'autre seule une composante de l'un des vecteurs $\varphi_j$. On reprend ensuite les raisonnements de la première partie de ce paragraphe, ajoutant en outre pour la construction de la matrice les termes réguliers $H(p)$.

On peut proposer également une méthode basée sur l'approche de P. Perline [2, 3]. Pour plus de simplicité les conditions aux limites sont supposées nulles sur la surface $S_1$, sur laquelle on introduit la fonction auxiliaire $\varphi_2(q)$, égale à la moitié du déplacement sur cette surface. On forme un potentiel de couche double $W(p,\ \varphi_2)$ et on considère un déplacement $U_1(p)=U(p)-W(p,\ \varphi_2)$ qui vérifie les équations de l'équilibre élastique dans tout l'espace à l'exclusion de la surface $S_1$. Ainsi, on est une nouvelle fois conduit au problème de base considéré précédemment. L'équation fonctionnelle correspondante renferme des termes supplémentaires dépendant de la forme de représentation de la fonction $\varphi_2(q)$ sur la surface $S_1$. Généralement, on peut la considérer constante par morceaux.

Notons que dans le cas où le corps élastique occupe le demi-espace, le problème peut être traité de façon spéciale. Il est indiqué d'élaborer l'équation fonctionnelle non à partir de la solution de Kelvin-Somigliana, mais de la solution de Mindlin pour une force concentrée dans le demi-espace (cf. R. D. Mindlin * [1]). Remarquons que les conditions aux limites sur la surface extérieure (qu'il faut poser nulles) sont alors vérifiées exactement. C'est en s'appuyant sur de telles considérations qu'a été résolu le problème pour un demi-espace présentant une coupure en forme de rectangle (cf. B. Zinoviev [1]). Les valeurs de la densité aux points de la coupure, ainsi que les valeurs des contraintes aux points du corps élastique disposés le long de la coupure sont représentées sur la figure 27.

Passons à la considération du cas où la coupure émerge à la surface. Notons $L_1$ la partie du contour $L$ qui appartient à la surface $S_1$. Introduisant sur la surface $S$ un potentiel auxiliaire, nous passons au problème d'un domaine continu; résolvant ce nouveau problème d'une façon quelconque (supposant, par exemple, le saut du déplace-

ment conventionnellement donné sur $S$) nous aboutissons finalement à une équation pour le saut. La première difficulté de poids est que le problème auxiliaire posé pour le domaine continu devra être résolu pour une condition aux limites discontinue le long de la courbe $L_1$. D'autre part, comme on a noté au § 17, il n'y a pas d'information sur le comportement asymptotique de la solution au voisinage des extrémités de cette courbe.

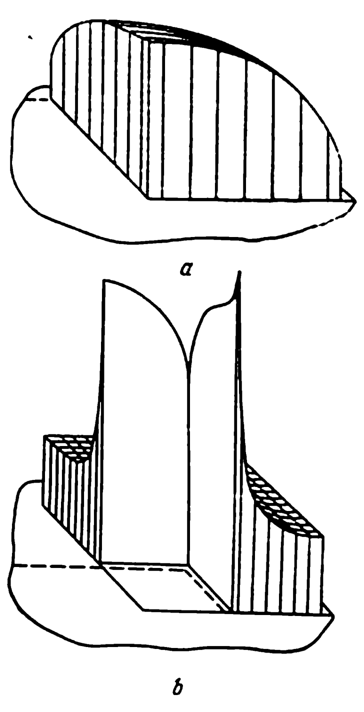



Fig. 27. Demi-espace présentant une coupure extérieure sous forme de rectangle. Valeurs des déplacements sur la surface de la coupure ($a$), contraintes normales dans le plan de la coupure ($b$).

Dans de nombreux travaux sont traités les cas où la coupure diffère légèrement (dans un certain sens) d'un cercle. Les méthodes d'établissement et de résolution des équations intégrales correspondantes seront exposées en détail au § 38 dans leur application aux problèmes de contact.

Dans les calculs de l'état de contrainte des corps présentant des fissures soulignons l'intérêt, du point de vue de la mécanique de rupture fragile (cf. V. Parton, E. Morozov [1]), du coefficient d'intensité des contraintes qui se détermine par la formule

$$K = \lim_{\rho\to 0} (2\pi\rho)^{1/2}\sigma_z, \qquad (36.7)$$

où la composante $\sigma_z$ est calculée sur le prolongement de la coupure dans le plan perpendiculaire au bord de la coupure. L'exposant 1/2 est trouvé conformément à l'équation (17.13). On a exposé au § 25 les procédés permettant de déterminer les facteurs dans le premier terme de la série asymptotique pour les contraintes, pour des domaines délimités par des contours réguliers par morceaux, à partir de la solution obtenue pour des domaines à contours réguliers.

Tout ce qui vient d'être dit est entièrement applicable au calcul de l'état de contrainte des corps élastiques présentant une cavité mince au lieu d'une coupure.

## § 37. Résolution des problèmes de la théorie de l'élasticité pour des corps délimités par des surfaces régulières par morceaux

On a supposé jusqu'alors que les surfaces délimitant les corps élastiques sont des surfaces de Liapounov. Ce fait a été utilisé notamment pour l'établissement des équations intégrales. Supposons maintenant que la surface comporte des arêtes, des points coniques, des sommets d'angles polyèdres. La surface totale peut alors être représentée comme la somme de surfaces assez régulières non fermées qui, en se coupant, forment des arêtes et des sommets. Pour la position du premier problème aux limites les conditions initiales peuvent être données sur toute la surface, alors que dans le cas du deuxième problème les conditions aux limites doivent être données uniquement aux points intérieurs de chacune des portions régulières de la surface (puisque dans la position du problème entrent les cosinus directeurs de la normale). Quant aux points irréguliers de la frontière, ils peuvent être considérés comme points limites de tel ou tel morceau d'une surface régulière. Chaque point d'arête doit être pris en compte deux fois, comme appartenant à l'une et à l'autre des surfaces contingentes (chaque fois avec un sens différent de la normale).

Dans le cas spatial (comme dans le cas plan) tout est suffisamment clair pour ce qui est du comportement des déplacements et des contraintes dans le voisinage des points irréguliers de la frontière, pour le moins au voisinage des arêtes et des points coniques (V. Kondratiev [1]). Les considérations suivantes sont également vraies (O. Aksentian [1], V. Koldorkina [1]). Soit une arête régulière. Introduisons un plan perpendiculaire à l'arête en un point quelconque. Alors la série asymptotique exprimant l'état de contrainte au voisinage d'un point donné de l'arête dans le plan local introduit est la même que dans le cas du problème plan (cf. § 17), tandis que le terme suivant de la série correspond à la solution du problème d'une déformation antiplane qu'on ramène à un problème harmonique. Dans ce cas il est nécessaire d'utiliser les fonctions propres $\rho^{\lambda}\cos\theta$ où $\lambda$ se définit à partir de (17.19). Le recours au second terme de la série peut s'avérer nécessaire, pour élever la précision de la solution, dans les problèmes très particuliers, où le facteur du premier terme s'annule. Indiquons à titre d'exemple le problème de la torsion d'une « lentille », domaine formé par l'intersection de deux sphères.

Dans le cas d'un point conique V. Kondratiev [1] a établi que la solution peut aussi être représentée comme la somme d'une fonction indéfiniment dérivable et d'une série asymptotique selon des fonctions qui sont les solutions du problème aux limites d'un cône avec le même angle au sommet, lorsque les conditions aux limites, de même forme que les conditions initiales, sont homogènes. Rappelons que

dans le cas d'un cône circulaire les résultats correspondants sont présentés sur la figure 8.

Les questions d'application de la méthode du potentiel à la résolution des problèmes harmoniques concernant des domaines délimités par des surfaces non régulières sont envisagées dans les travaux de T. Carleman * [1], J. Radon * [1], Yu. Bourago, V. Mazia et V. Sapozhnikova [1] et autres. Des questions analogues relatives au calcul des équations aux dérivées partielles qui comportent comme cas particulier celles de la théorie de l'élasticité ont fait l'objet d'étude du travail de V. Mazia et G. Kressine [1]. Notons que les travaux cités n'ont pas encore été utilisés pour le calcul de la solution des problèmes aux limites.

Comme on a noté au § 25, on peut étendre, d'une façon formelle, aux frontières non réguilières les schémas de calcul valables pour des contours réguliers. Il est naturel d'utiliser cette approche pour les problèmes spatiaux également. N. Andrianov et P. Perline [1] proposent un algorithme utilisant aussi bien les points d'appui que les points nodaux. Dans ce cas il faut traiter chacun des morceaux réguliers de la surface indépendamment, évitant l'apparition de domaines élémentaires à l'intérieur desquels se trouveraient des points irréguliers. Dans cette apporche tous les points d'appui s'avèrent des points réguliers et on peut, par conséquent, calculer les volumes par les mêmes formules que dans le cas des surfaces régulières (y compris les représentations régulières). La différence consiste seulement en ce qu'aux points nodaux disposés sur l'arôte (comme on a montré, chacun d'eux est considéré deux fois) les fonctions $\varphi_n$ $(q)$ seront déterminées par extrapolation (à l'extérieur par interpolation, comme dans le cas des points nodaux situés dans les domaines réguliers), à partir des valeurs aux points d'appui choisis aussi bien sur l'une que sur l'autre surface. On obtiendra naturellement des résultats différents. Par conséquent, l'arête se trouvera être une ligne de discontinuité de la densité cherchée du potentiel de couche simple. Si l'on part d'un schéma de calcul plus simple en utilisant la formule des rectangles (les calculs se font pour les points d'appui seulement), il n'est pas question d'extrapolation. Dans ce cas la partition sera réalisée de la façon indiquée plus haut. La discontinuité de la densité des différents côtés survient ici automatiquement.

Il est clair que la présence des points irréguliers de la frontière entraîne un accroissement rapide de la densité $\varphi$ $(q)$ dans leur voisinage, c'est pourquoi l'élaboration d'un schéma de calcul convergent peut exiger une subdivision autrement plus fine que pour les surfaces régulières. Remarquons qu'une partition suffisamment fine est exigée également pour les portions régulières à courbure fortement variable.

Les calculs montrent qu'avec une partition appropriée, les algorithmes s'avèrent convergents et avec la diminution des dimensions des

domaines élémentaires on observe une stabilité des valeurs de la densité aux points sensiblement voisins des points irréguliers, ce qui conduit, naturellement, à des valeurs stables de contraintes partout à l'exclusion d'un voisinage restreint de ces points. Il convient d'utiliser l'information qu'on a sur le comportement de la solution du problème aux limites au voisinage des points irréguliers pour la recherche du premier terme de la série asymptotique et, en géneral, pour estimer l'erreur de la solution approchée. Prenons à titre d'exemple un problème modèle et précisons les raisonnements généraux que nous venons d'exposer.

Soit une surface obtenue par la rotation d'un carré de côté 1 autour de sa diagonale. La surface présente alors dans ce cas une arête et un point conique. On recherche la solution des problèmes (extérieur et intérieur) pour une pression hydrostatique de valeur unité. Le problème étant à symétrie axiale, la partition du contour se défini par la position des points d'appui, les points nodaux étant choisi à mi-distance des points d'appui voisins. Dans le tableau 12 son

*Tableau 12*

| Points | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0007 | 0,0010 | 0,0015 | 0,0020 | 0,0040 |

données les distances des 10 points d'appui les plus proches du sommet et dans le tableau 13 celles des 10 points d'appui les plus proches de l'arête.

*Tableau 13*

| Points | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 0,0001 | 0,0002 | 0,0003 | 0,0004 | 0,0005 | 0,0007 | 0,0010 | 0,0015 | 0,0025 | 0,0030 |

Les valeurs des densités obtenues au cours de calcul sont présentées dans les tableaux 14 et 15. Les données du tableau 14 se rapportent aux points disposés à proximité du sommet et celles du tableau 15 à ceux situés à proximité de l'arête.

Les résultats définitifs du calcul, c'est-à-dire les valeurs des contraintes, sont présentés aux tableaux 16 et 17. Dans le tableau 16 sont rapportées les valeurs des contraintes aux points situés sur l'axe de rotation (en fonction de la distance au sommet). Sont également présentées les valeurs de la fonction $\rho^{-0,2}$ tirée de l'équation (17.16),

*Tableau 14*

| Points | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_r^+$ | 1,614 | 1,269 | 1,116 | 1,026 | 0,957 | 0,872 | 0,798 | 0,727 | 0,659 | 0,582 |
| $\varphi_z^+$ | 10,41 | 8,03 | 6,88 | 6,16 | 5,64 | 4,95 | 4,30 | 3,67 | 3,27 | 2,51 |
| $\varphi_r^-$ | 5,28 | 4,44 | 3,96 | 3,78 | 3,61 | 3,39 | 3,17 | 2,94 | 2,80 | 2,49 |
| $\varphi_z^-$ | 1,59 | 1,43 | 1,29 | 1,21 | 1,18 | 1,11 | 1,05 | 0,988 | 0,989 | 0,823 |

*Tableau 15*

| Points | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi_r^+$ | 2,78 | 2,30 | 2,08 | 1,95 | 1,85 | 1,71 | 1,58 | 1,45 | 1,31 | 1,26 |
| $\varphi_z^+$ | 0,53 | 0,58 | 0,55 | 0,53 | 0,51 | 0,50 | 0,47 | 0,45 | 0,44 | 0,43 |
| $\varphi_r^-$ | 0,69 | 1,17 | 1,01 | 0,91 | 0,84 | 0,78 | 0,73 | 0,67 | 0,65 | 0,62 |
| $\varphi_z^-$ | 31,94 | 22,67 | 18,67 | 16,33 | 14,75 | 12,67 | 10,81 | 9,05 | 7,24 | 6,69 |

*Tableau 16*

| Points | 0,00001 | 0,00002 | 0,00004 | 0,00006 | 0,00010 |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r = \sigma_\theta$ | 5,86 | 5,07 | 4,22 | 3,79 | 3,33 |
| $\sigma_z$ | 4,96 | 4,29 | 3,28 | 2,72 | 2,23 |
| $\rho^{-0,2}$ | 10,000 | 8,705 | 7,578 | 6,988 | 6,310 |
| $\sigma_r\rho^{0,2}$ | 0,586 | 0,582 | 0,557 | 0,542 | 0,527 |
| $\sigma_z\rho^{0,2}$ | 0,496 | 0,493 | 0,428 | 0,389 | 0,363 |

18—0340

*Tableau 17*

| $\rho$ | 0,00001 | 0,00002 | 0,00004 | 0,00006 | 0,00010 | 0,00015 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r$ | 24,78 | 24,02 | 20,83 | 17,88 | 14,10 | 11,41 |
| $\sigma_\theta$ | 21,67 | 18,93 | 15,09 | 12,71 | 10,11 | 8,38 |
| $\sigma_z$ | 46,46 | 38,46 | 28,92 | 23,92 | 18,97 | 15,77 |
| $\rho^{-0,455}$ | 188,4 | 137,4 | 100,2 | 83,35 | 66,07 | 54,94 |
| $\sigma_r\rho^{0,455}$ | 0,131 | 0,178 | 0,208 | 0,214 | 0,2134 | 0,208 |
| $\sigma_\theta\rho^{0,455}$ | 0,115 | 0,137 | 0,151 | 0,151 | 0,153 | 0,152 |
| $\sigma_z\rho^{0,455}$ | 0,247 | 0,280 | 0,2870 | 0,2870 | 0,2871 | 0,2870 |

puisque d'après la figure 8 pour $\nu = 0,3$ on trouve $\lambda = 0,8$. On donne dans la dernière ligne du tableau les rapports des contraintes à $\rho^{-0,2}$. D'une manière analogue sont disposées les données dans le tableau 17. On y trouve les composantes des contraintes, la fonction $\rho^{-0,455}$ obtenue conformément à la représentation (17.3) (puisque d'après l'équation (17.10) on a $\lambda = 0,545$), ainsi que les rapports de ces contraintes à cette fonction.

On voit que chacun de ces rapports admet un maximum et ceci permet de proposer le procédé suivant de recherche des représentations asymptotiques. Considérons d'abord le point conique. Soit $C_r$ et $C_z$ les valeurs des maximums correspondants. On propose alors de considérer les points auxquels le maximum est atteint comme les points définissant le passage de la solution obtenue par un procédé approché (à l'aide d'équations intégrales en l'occurrence) à la solution asymptotique, les facteurs des fonctions propres étant les coefficients $C_r$ et $C_z$ introduits plus haut. Avec un tel choix il sera aisé de passer d'une solution à l'autre. On tire du tableau 16 $C_\theta = C_r = 0,59$, $C_z = 0,5$.

Les calculs effectués nous permettent donc d'affirmer qu'ont lieu les représentations

$$\sigma_\theta = \sigma_r = 0,59\ \rho^{-0,2}, \quad \sigma_z = 0,5\ \rho^{-0,2}. \tag{37.1}$$

En utilisant les équations (17.17) on peut obtenir sans peine les

premiers termes des séries asymptotiques dans n'importe quelle direction. Sur la figure 28 sont représentées les valeurs des contraintes $\sigma_r$ obtenues par calcul des équations intégrales et celles calculées d'après (37.1).

Analysons maintenant la solution au voisinage de l'arête (tableau 17). Là aussi on peut observer la présence de maximums pour les rapports correspondants qu'on note $C_r$ (0,214), $C_\theta$ (0,153) et $C_z$ (0,287). Il s'avère possible d'estimer indépendamment la précision des valeurs des coefficients $C_r$, $C_\theta$ et $C_z$. En effet, comme on a

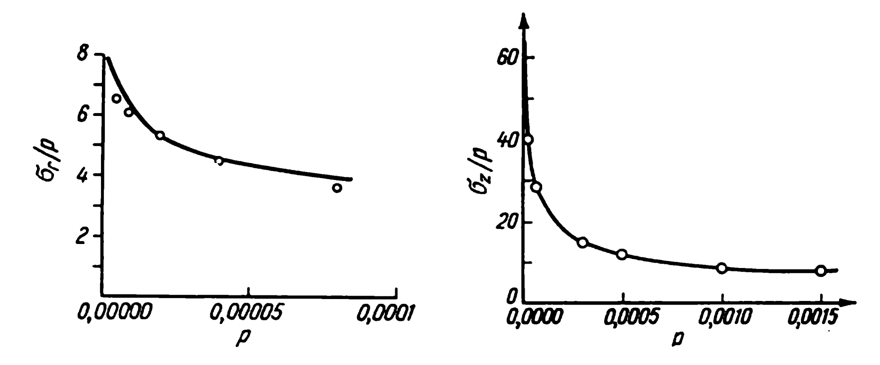



Fig. 28. Contrainte $\sigma_r$ sur l'axe de rotation.

Fig. 29. Contrainte $\sigma_z$ sur le plan médian.

noté au § 17, la solution au voisinage de l'arête régulière a le même comportement asymptotique que dans le cas d'un état plan de déformation. C'est pourquoi les coefficients $C_r$, $C_\theta$ et $C_z$ doivent être liés par la relation (cf. § 15):

$$C_\theta = \nu\,(C_r + C_z). \tag{37.2}$$

Remarquons que cette égalité a lieu pour les données obtenues avec une précision suffisante (2 %). Ces coefficients vérifient en outre une autre relation. En vertu de (17.8) les solutions propres dans le cas d'un coin (ce sont précisément elles qui coïncident avec la représentation asymptotique) peuvent s'exprimer à l'aide d'une constante. C'est pourquoi dans notre cas (pour $\alpha = 0{,}75\,\pi$) nous obtenons la relation

$$C_z = 1{,}483\ C_r. \tag{37.3}$$

L'erreur vaut ici 9 %. La figure 29 montre les valeurs de $\sigma_z$ obtenues par calcul des équations intégrales et celles calculées d'après la formule $\sigma_z = 0{,}287\ \rho^{-0{,}455}$.

Voyons comment se présentent les résultats de la résolution du problème intérieur. La solution du problème aux limites (et non de l'équation intégrale) est triviale, toutes les composantes normales

des contraintes étant égales à l'unité et les composantes tangentielles à zéro. Le tableau 18 présente les valeurs des contraintes aux points de l'axe de rotation à la distance indiquée du sommet.

*Tableau 18*

| $\rho$ | 0,002 | 0,003 | 0,005 | 0,020 |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r = \sigma_\theta$ | 1,0048 | 1,011 | 1,005 | 0,9956 |
| $\sigma_z$ | 1,0041 | 1,026 | 1,040 | 0,9997 |

Le tableau 19 présente les valeurs des contraintes dans le plan médian à la distance indiquée de l'arête.

On voit que seulement dans un voisinage très restreint des points irréguliers la solution diffère de la solution exacte. Remarquons que

*Tableau 19*

| $\rho$ | 0,0004 | 0,0007 | 0,0050 | 0,020 |
|---|---|---|---|---|
| $\sigma_r$ | 0,7277 | 0,7424 | 0,9249 | 0,9603 |
| $\sigma_\theta$ | 0,8775 | 0,9355 | 0,9857 | 1,0062 |
| $\sigma_z$ | 0,9744 | 0,9673 | 1,0352 | 1,0154 |

dans ces cas la question du recours aux représentations asymptotiques ne s'est pas posée, les équations correspondantes (cf. fig. 7 et 8) n'admettant pas de solutions dans l'intervalle de 0 à 1 pour les angles correspondants.

Envisageons le procédé de résolution des problèmes spatiaux pour des corps délimités par des surfaces régulières par morceaux, proposé dans les travaux de T. A. Cruse * [3] et T. A. Cruse, W. Van Buren * [1] (l'exposé général de cette méthode est donné au § 33). Les auteurs spécifient que l'utilisation des équations intégrales singulières (29.6) obtenues à l'aide de la formule de Betti est préférable à celle des équations (29.3) obtenues à l'aide de la représentation des déplacements par un potentiel de couche simple, dans le cas où la surface $S$ est régulière par morceaux. De plus, ils affirment que les équations (29.6) sont vraies en position rigoureuse également. On

ne peut être de leur avis, puisque pour l'établissement de ces équations on a utilisé les formules limites (28.10′), valables uniquement pour les surfaces de Liapounov. Les données rapportées ne permettent pas d'estimer la précision des calculs et par conséquent d'émettre une opinion. D'autre part, les calculs sont effectués pour une discrétisation fixe de la surface et ne suffisent pas à donner une idée de la dispersion (ou de l'oscillation) possible des fonctions cherchées.

Indiquons en conclusion que la méthode mentionnée au § 25 de V. Mazia et B. Plaménevski pour la détermination des coefficients des fonctions propres s'étend automatiquement au cas d'un point conique. Celui d'une surface présentant une arête régulière est envisagé dans l'article [3] des mêmes auteurs.

## § 38. Problèmes mixtes (de contact)

Soit $S_1$ une partie de la surface $S$ délimitant le corps élastique $D$ et $S_2$ son complémentaire dans $S$. Désignons par $L$ la courbe fermée régulière qui est la frontière entre $S_1$ et $S_2$.

Il s'agit de déterminer le champ des déplacements $U(p)$ dans le domaine $D$ pour les conditions aux limites

$$U(q) = f_1(q) \quad (q \in S_1), \quad T_n U(q) = f_2(q) \quad (q \in S_2). \quad (38.1)$$

Les problèmes de ce genre sont dits *problèmes mixtes* (ou *de contact*) et quoiqu'ils soient d'une importance capitale pour les applications, leur étude dans la position générale n'est pas suffisamment poussée, vu sa complexité. La démonstration de l'existence de la solution du problème physique même est donnée dans l'ouvrage de G. Fichera * [1] *), mais l'établissement et l'étude des équations intégrales de ces problèmes ne peuvent être estimés finis.

L'établissement des équations intégrales pour les problèmes mixtes ne présente pas de difficultés. En effet, si l'on recherche le déplacement sous la forme d'un potentiel de couche simple, alors passant à la limite vers les points de la surface $S_1$ (pour les déplacements) et vers les points de la surface $S_2$ (pour les contraintes), on est conduit à une équation intégrale à coefficients et noyaux discontinus. La question de la résolubilité de telles équations reste ouverte.

A. Alexandrov [7] propose de les résoudre par la méthode d'intégration mécanique, utilisant pour le calcul des termes singuliers les résultats de son article [1]. T. A. Cruse *[1] applique la méthode d'intégration mécanique pour résoudre les équations intégrales obtenues moyennant un passage à la limite adéquat dans la formule de Betti (14.27).

---

*) Pour le problème harmonique la démonstration a été obtenue par S. Zaremba *[1].

Remarquons que des équations intégrales singulières de deuxième espèce à noyaux discontinus peuvent être obtenues si l'on utilise la représentation des déplacements sous la forme d'une somme de deux potentiels : potentiel de couche simple (dont la densité est prise sur la surface $S_2$) et potentiel de couche double (dont la densité est prise sur la surface $S_1$). V. Kupradze [3] fait l'étude des problèmes mixtes à l'aide de la matrice de Green.

Une méthode approchée de résolution des problèmes fondamentaux (cf. V. Kupradze, M. Alexidze [1]) est utilisée dans l'article [2] de M. Alexidze et K. Samsonia pour la résolution des problèmes mixtes. Les auteurs obtiennent tout un assortiment de solutions particulières $\Gamma(p, p_k)\varphi(p_k)$ des équations de la théorie de l'élasticité à l'aide d'un certain ensemble de points $p_k$ situés en dehors du domaine $D$. Les coefficients correspondants $\varphi(p_k)$ sont trouvés par la méthode des moindres carrés.

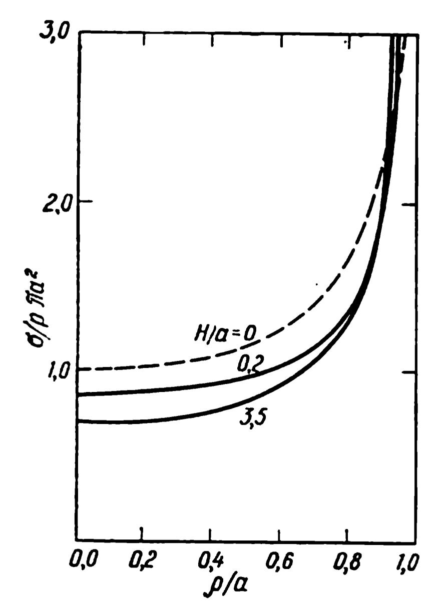



Fig. 30. Contraintes de contact pour différents enfoncements ($H/a$). En pointillé sont représentées les contraintes de contact pour $H = 0$ (solution exacte).

On peut proposer également le schéma de calcul suivant : sur la moindre des surfaces $S_1$ ou $S_2$ les conditions inconnues (pour la surface $S_1$ les contraintes) sont représentées d'une façon constructive quelconque, par exemple, par développement en série (dans tel ou tel système de coordonnées). Alors pour chaque harmonique on cherche la solution du problème aux limites correspondant, après quoi les coefficients recherchés sont déterminés de la condition de minimalité de l'écart moyen des conditions aux limites connues sur la surface considérée.

Ce procédé est surtout avantageux pour les problèmes dans lesquels sont connues sur la surface $S_1$ la composante tangentielle des contraintes et la composante normale des déplacements, puisque dans ce cas la fonction cherchée est une fonction scalaire et non une fonction vecteur. Un problème de ce genre est envisagé par V. Likhovtsev et P. Perline (cf. V. Likhovtsev [1]) : le demi-espace présentait une coupure cylindrique ; l'effort $P$ se transmettait par une étampe plane appliquée au bout du cylindre et occupant entièrement sa surface.

La composante normale des contraintes a été prise sous forme de la série $\sigma(\rho/a) = [1 - (\rho/a)^2]^{-2/3} [\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (\rho/a)^{2n}]$. La structure du facteur découle de l'équation (17.14, II-III) posant $\alpha = 1{,}5\,\pi$. Les calculs ont été effectués en gardant un ou deux termes de la série pour différents rapports de la hauteur du cylindre $H$ à son rayon $a$. Les diagrammes des contraintes de contact pour $H/a = 0{,}2$ et $3{,}5$ sont représentés sur la figure 30. La solution exacte pour $H = 0$ est donnée en pointillé.

Dans le tableau 20 sont données les valeurs des coefficients $\alpha_n$ (en fonction du nombre de termes de la série gardés), les valeurs (correspondant à ces différents cas de calculs) des erreurs de calcul des déplacements ainsi que les contraintes de contact $\sigma' = \pi a^2 \sigma(\rho/a)/P$ pour $H/a = 0{,}2$.

*Tableau 20*

**Valeurs des coefficients de la fonction $\sigma(\rho/a)$, de l'erreur de calcul des déplacements et des pressions de contact en fonction du nombre de termes gardés dans la série**

| $\alpha_0$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\Delta$ (%) | $\sigma'$ ($\rho/a = 0{,}0$) | $\sigma'$ ($\rho/a = 0{,}5$) | $\sigma'$ ($\rho/a = 0{,}9$) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,000 | | | 4 | 0,678 | 0,822 | 2,038 |
| 1,276 | -0,357 | | 1 | 0,866 | 0,972 | 2,010 |
| 1,266 | -0,408 | 0,120 | 0,6 | 0,856 | 0,960 | 2,005 |

Passons à la considération des problèmes pour quelques domaines concrets. Naturellement, il sera question de méthodes spécifiques tenant compte de la structure de ces domaines. Les plus étudiés sont les problèmes de contact pour le demi-espace.

Dans les cas où sur la surface $S_1$ sont données toutes les composantes du déplacement (on dit qu'il y a adhérence à l'étampe), on peut obtenir l'équation intégrale à partir de la solution de Cerruti (cf. W. Nowacki *[1]) pour une force concentrée sollicitant la frontière du demi-espace. Faisant la somme des déplacements dus à toutes les trois composantes on obtient leur représentation sur la surface $S_1$ sous forme intégrale.

Arrêtons-nous plus en détail sur le cas le plus étudié, celui où les contraintes tangentielles sont nulles, de sorte qu'on peut utiliser la solution de Boussinesq. En vertu de cette solution, la composante des déplacements, normale à la frontière et due à la force concentrée $P$ exercée au point $q$, admet sur la surface une forme extrêmement simple

$$U = \frac{P(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{1}{r(p,\,q)} = \alpha \frac{P}{r}.$$

De cette formule vient d'emblée l'équation intégrale

$$\alpha \int\limits_{S_1} \frac{p(q')}{r(q, q')} dS_{q'} = f_1(q) \quad (q \in S_1). \tag{38.2}$$

Indiquons l'analogie connue qui existe entre le problème mixte pour le demi-espace en l'absence de contraintes tangentielles sur sa surface et le problème pour l'espace avec la même coupure plane lorsqu'il n'est sollicité que par une pression normale (égale des deux côtés). Du fait de la présence d'un plan de symétrie, le dernier problème peut être considéré comme mixte, quand sur la surface de la coupure sont données les pressions et à l'extérieur de celle-ci, les déplacements normaux nuls. Par superposition de la solution du deuxième problème fondamental pour le demi-espace avec les mêmes valeurs de contraintes sur la surface $S_1$ nous sommes conduits à un problème mixte pour des contraintes nulles sur la surface $S_1$ et des déplacements donnés en dehors de celle-ci.

Ainsi, la résolution du problème mixte de la théorie de l'élasticité se ramène à la résolution du problème mixte de la théorie du potentiel qui s'avère (par raison de symétrie) équivalent au problème de Dirichlet pour tout l'espace si l'on donne sur la surface $S_1$ une valeur de la fonction harmonique. D'après F. Tricomi *[1] la solution de ce dernier problème peut être recherchée sous la forme d'un potentiel de couche simple et ceci conduit à la même équation (38.2).

Des résultats obtenus par S. Zaremba *[1] découle l'existence d'une fonction harmonique, représentable sous la forme d'un potentiel de couche simple (naturellement dans le cas où la fonction $f(q)$ est suffisamment régulière). C'est pourquoi l'équation (38.2) s'avère résoluble et en outre admet une solution unique. S. Mikhline [4] indique la possibilité d'appliquer à l'équation intégrale (38.2) (en tant qu'équation à noyau symétrique) le théorème de Hilbert-Schmidt selon lequel la solution admet un développement en série suivant les fonctions propres. On ne peut parler, il est vrai, que de convergence en moyenne. La réalisation pratique de cette approche est donnée par V. Dovnorovitch (cf. S. Mikhline [4]) sur l'exemple d'un problème à symétrie axiale.

Un grand nombre de travaux est consacré à la résolution de l'équation (38.2) dans certains cas particuliers, on en trouvera l'exposé dans les monographies de I. Staerman [1], L. Galine [1] et A. Lourié [1]. Notons qu'ils se rapportent aux cas d'étampes circulaires et elliptiques.

Passons à la considération des méthodes approchées de résolution de l'équation (38.2), quand la surface est, dans un certain sens, voisine d'un cercle. A. Efimov et V. Vorobiev [3] proposent d'appliquer le domaine $S_1$ sur un cercle, en introduisant dans la fonction de départ un certain paramètre qu'on suppose suffisamment petit et réalisant

par ailleurs une transformation correspondante de l'équation intégrale (le noyau est représenté sous forme d'une série suivant le paramètre). Ecrivons cette équation en notation symbolique: $Kp = f$, et représentons-la sous la forme:

$$K_0 p = f - (K - K_0) p, \tag{38.3}$$

où l'opérateur $K_0$ correspond à la valeur nulle du paramètre (c'est-à-dire quand la surface $S_1$ est un cercle) et par conséquent l'opérateur inverse $K_0^{-1}$ est connu. Il est proposé de résoudre l'équation (38.3) par la méthode des approximations successives, ce qui nous conduit aux relations récurrentes

$$p_n = p_0 - K_0^{-1} (K - K_0) p_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Il est évident que pour une valeur suffisamment petite du paramètre il y aura convergence. Remarquons que pour une étampe elliptique plane la convergence existe quelle que soit la valeur de l'excentricité.

Notons également le procédé proposé dans l'article [1] de M. Léonov, K. Tchoumak. Les auteurs partitionnent le domaine $S_1$ en un cercle intérieur à $S_1$ et en son complémentaire qui est un anneau. Dans l'anneau les contraintes sont représentées sous forme analytique (à l'aide de coordonnées locales qu'on prend dans le sens de la normale ($\rho$) et de la tangente ($s$) au contour $L$), soit $p(\rho, s) = \beta(s)\rho^{-1/2}$. Le facteur $\beta(s)$ est déterminé de la façon suivante. On résout le problème de contact pour une étampe ronde en présence d'une charge supplémentaire $p(\rho, s)$ et de la condition de finitude des contraintes sur le contour du cercle on déduit une équation pour la fonction $\beta(s)$. On peut préciser ce schéma en admettant que le coefficient $\beta(s)$ dépend linéairement (ou de façon plus complexe) de la coordonnée $\rho$.

Envisageons encore la résolution du problème de contact pour une sphère en cas de symétrie axiale (cf. V. Bondarev [2]). L'auteur utilise ici pour la composante radiale du déplacement l'expression qu'il a obtenue dans un de ses travaux antérieurs (cf. V. Bondarev [1]) dans le cas d'un chargement par une pression normale à symétrie axiale. Il aboutit à une équation intégrale de première espèce sur le segment sphérique $S_1$ et arrive à isoler du noyau de l'intégrale des termes (avec un changement de variables) qui coïncident avec les termes de l'équation du problème de contact à symétrie axiale pour le demi-espace (cf. M. Léonov [2]) (dans ce même travail la solution de cette équation est obtenue sous forme explicite). Les termes indiqués sont transférés d'un même côté et les autres sont considérés comme le second membre d'une équation auxiliaire, dont la résolution conduit à une équation intégrale de deuxième espèce à noyau régulier. Il est montré que l'équation obtenue peut être résolue par la méthode des approximations successives.

## § 39. Supplément

La méthode de résolution des équations intégrales singulières correspondant aux problèmes fondamentaux spatiaux de la théorie de l'élasticité exposée au § 33 a été appliquée, compte tenu des recommandations données au § 37, à l'étude de l'état de contrainte dans différents problèmes d'application. La méthode s'est enrichie de toute une

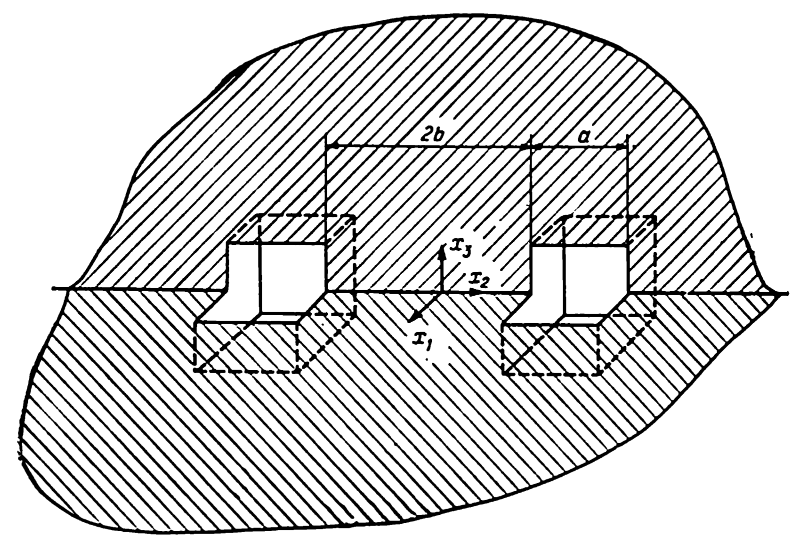



Fig. 31. Espace à deux cavités cubiques.

série de procédés permettant d'améliorer son efficacité et de faciliter la préparation des données initiales (P. Perline, E. Chafarenko, A. Sternchis [1]).

Un des procédés, par exemple, consistait en ce qui suit. Pour l'élaboration des formules de calcul des intégrales

$$\int_S [\Gamma_1(q, q')\varphi(q') - \Gamma_2(q, q')\varphi(q)]\, dS_{q'} \qquad (39.1)$$

les termes de la somme intégrale correspondant aux domaines $S_j$ voisins du point $q$ auquel on calcule l'intégrale (39.1) étaient déterminés à l'aide des formules de Gauss d'ordre assez élevé pour le calcul des volumes. Avec l'augmentation de la distance l'ordre des formules de Gauss baissait et à une distance notable on utilisait déjà des formules élémentaires donnant le volume comme le produit de l'expression sous l'intégrale au point central par la surface du domaine. Ce procédé est en fait équivalent à l'utilisation d'un réseau varia-

ble, quand la discrétisation de la surface dépend du point auquel on calcule l'intégrale (elle est plus fine au voisinage de ce point).

Le procédé dont on vient de parler a été utilisé par E. Chafarenko [1] pour la résolution d'un problème relatif à un espace affaibli par deux cavités cubiques identiques (fig. 31). La charge se ramenait à une pression hydrostatique de valeur unité. La partition des arêtes a été réalisée de la façon suivante. On se donnait sur les arêtes des points de plus en plus rapprochés vers les sommets et on menait des

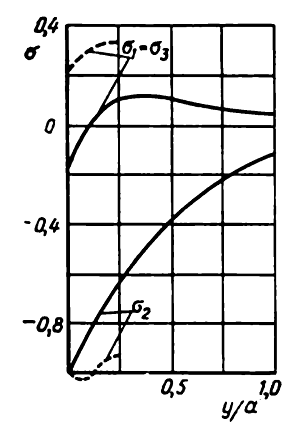



Fig. 32. Contraintes $\sigma_1 = \sigma_3$ et $\sigma_2$ le long de la droite réunissant les centres des cavités.

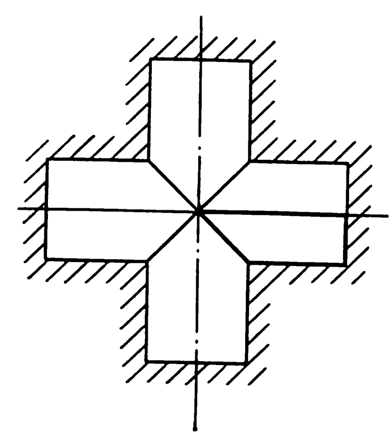


Fig. 33. Cavité en forme de croix.

droites réunissant les points correspondants des arêtes opposées et ces droites divisaient les faces en rectangles de différentes dimensions. L'existence de deux plans de symétrie géométrique et de force a permis de n'effectuer le calcul des fonctions $\varphi$ ($q$) qu'aux points d'un quart de la surface de l'une des cavités cubiques. Sur la figure 32 sont représentés les diagrammes des contraintes $\sigma_1 = \sigma_3$ et $\sigma_2$ sur la ligne réunissant les centres des cavités pour différentes épaisseurs de la cloison: $2b = 3a$ et $2b = 0{,}5\ a$. Sur les arêtes ont été choisis sept points qui les divisaient en segments de longueurs $0{,}05a$, $0{,}10a$, $0{,}15a$ et $0{,}20a$ et ensuite dans l'ordre inverse. Le calcul effectué pour un plus grand nombre de points a donné le même résultat (voir le tableau 21).

Un autre procédé consistait en l'utilisation d'approches connues pour la description universelle des surfaces de forme complexe. Toute la surface était divisée en quadrilatères, caractérisés par la position des sommets et du milieu des côtés, et à l'aide de fonctions dites fonctions de forme chacun d'eux était appliqué sur un carré dans un plan auxiliaire. La discrétisation des quadrilatères (non

*Tableau 21*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| une cavité ($b=\infty$) | | | | | | | | |
| 0,5 | 0,1 | 0,1 | 1<br>(0) | 0,382<br>(-0,053) | 0,158<br>(-0,027) | 0,078<br>(-0,01) | 0,033<br>(-0,005) | 0,015<br>(-0,002) |
| 0,5 | 0,4 | 0,4 | 1<br>(0) | 0,347<br>(-0,25) | 0,345<br>(0,01) | 0,088<br>(-0,02) | 0,05<br>(-0,003) | 0,018<br>(-0,003) |
| deux cavités ($b/a=2$) | | | | | | | | |
| 0,1 | 1,5 | 0,1 | 0<br>(-1) | -0,053<br>(-0,377) | -0,027<br>(-0,157) | -0,01<br>(-0,077) | -0,005<br>(-0,032) | -0,002<br>(-0,015) |
| 0,4 | 1,5 | 0,4 | 0<br>(-1) | -0,248<br>(-0,343) | 0,01<br>(-0,342) | -0,02<br>(-0,087) | -0,003<br>(-0,048) | -0,002<br>(-0,017) |
| deux cavités ($b/a=0,75$) | | | | | | | | |
| 0,1 | 0,25 | 0,1 | 0<br>(-1) | -0,035<br>(-0,24) | -0,015<br>(-0,085) | -0,033<br>(-0,048) | -0,033<br>(-0,013) | 0<br>(-0,01) |
| 0,4 | 0,25 | 0,4 | 0<br>(-1) | -0,192<br>(-0,265) | 0,003<br>(-0,302) | 0,003<br>(-0,04) | 0,005<br>(-0,038) | 0,007<br>(-0,007) |

plans en général) s'obtient alors automatiquement par la donnée des points sur les côtés des carrés (et parfois n'indiquant que le nombre de ces points). Pour obtenir la précision voulue de calcul des intégrales on emploie, au voisinage du point auquel on calculait l'intégrale, un réseau auxiliaire, beaucoup plus fin que le réseau global, défini par le point même.

Ce procédé a été utilisé par A. Sternchis [1] pour un problème concernant un espace comportant une cavité en forme de croix (fig. 33) formée par deux cavités cylindriques de même rayon. Le chargement se ramenait à une pression hydrostatique. Comme l'état de contrainte présente de l'intérêt au voisinage de l'intersection des surfaces, les cavités sont raccourcies à une certaine distance. On présente sur la figure 34 la valeur de la composante $\varphi$ et sur la figure 35 celle de la composante des contraintes $\sigma_r$, $\sigma_z$, $\sigma_\theta$ (le long de la génératrice menée sur la figure 33 en trait gras).

Dans l'article [1] de E. Alexéeva, P. Perline, A. Sternchis ce même procédé a été utilisé pour la résolution du problème relatif à un cylindre affaibli par une cavité cylindrique (fig. 36). Le chargement était réalisé par traction préalable de deux câbles disposés dans les

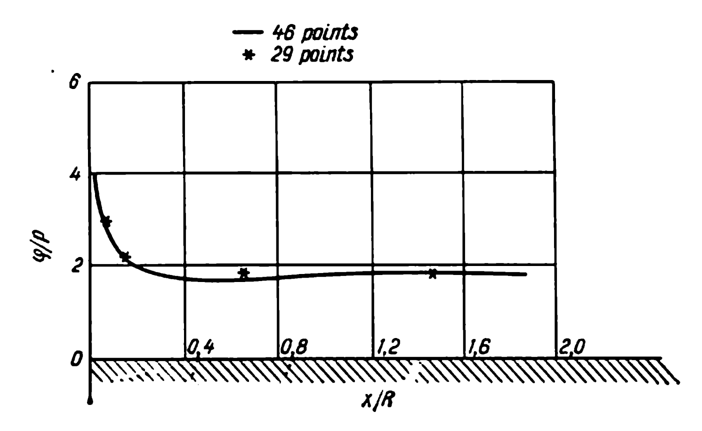



Fig. 34. Diagramme de la composante normale de la densité φ.

fonds fixés sur la surface extérieure. Deux variantes de construction sont représentées sur la figure 36, *a* et *b*. Le schéma de calcul se fonde sur l'existence à l'intérieur des corps de deux bandes cylindriques $S$ et $S'$ de largeur $\delta$, sollicitées par une pression de grandeur $q$ $(q)$

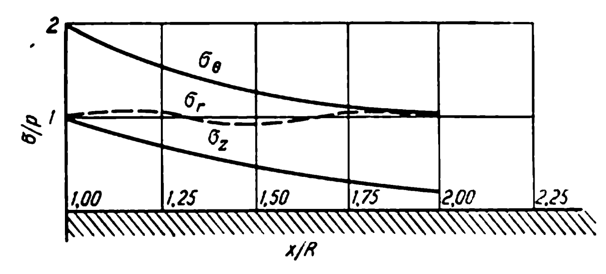



Fig. 35. Diagramme des contraintes $\sigma_z$, $\sigma_r$, $\sigma_\theta$.

qu'on suppose répartie uniformément, choisie de telle sorte que l'effort de compensation, appliqué aux points d'émergence des câbles, soit égal à $P$.

Pour passer au problème d'un corps non sollicité par des forces intérieures, il est nécessaire d'introduire un potentiel élastique généralisé (28.3) avec la densité 0,5 $q$ $(q)$:

$$U(p) = \frac{1}{2} \int_{S \cup S'} \Gamma(p, q)\, q(q)\, dS_q. \tag{39.2}$$

Ce potentiel représente la solution des équations de la théorie de l'élasticité pour tout l'espace, à l'exclusion des surfaces $S$ et $S'$, sur lesquelles le saut des valeurs limites de l'opérateur des contraintes sera égal à $q$ $(q)$. C'est pourquoi retranchant des déplacements recherchés le déplacement (39.2) on parvient à un problème qu'on peut résoudre par la méthode générale. Les charges apparaissant sur

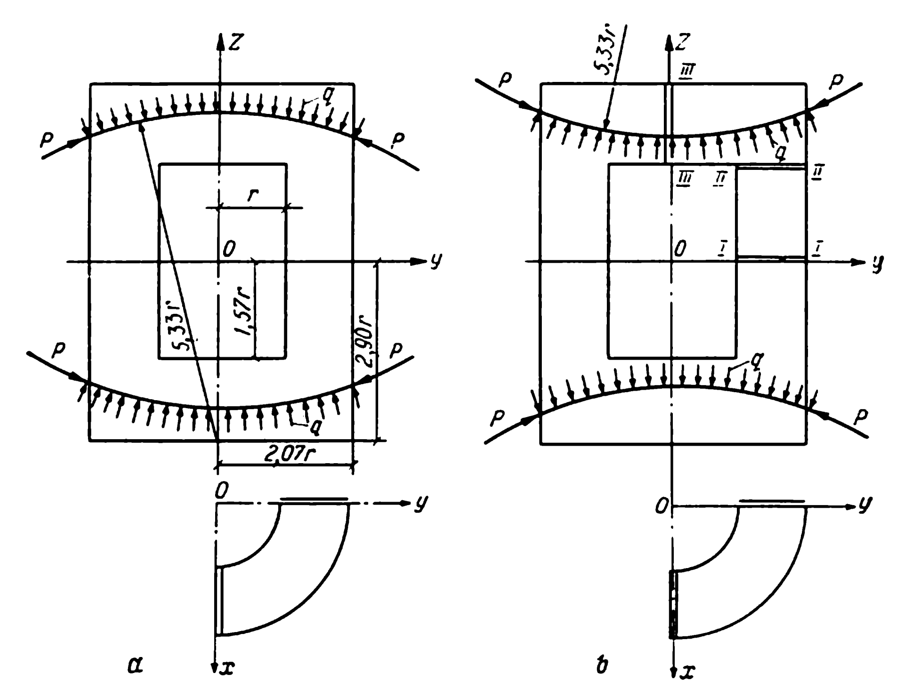



Fig. 36. Cylindre avec une cavité cylindrique sollicité par des efforts de traction: (*a*) — variante I, (*b*) — variante II.

les surfaces extérieure et intérieure sont déterminées à l'aide de l'opérateur des contraintes du potentiel $U(p)$. Les forces concentrées auraient pu être éliminées par superposition des solutions particulières de Boussinesq pour le semi-espace. Dans le travail cité ces forces étaient remplacées par une charge répartie uniformément sur de petits domaines. Les résultats de calcul pour les deux variantes de constructions sont présentés sur les figures 37 et 38.

Envisageons en dernier lieu le travail de G. Kokluev, A. Sternchis et P. Perline [1] dans lequel sont obtenues les solutions de plusieurs problèmes à symétrie axiale pour des corps de configuration complexe à l'aide du programme de S. Stoupak. Les sections et les charges correspondantes sont représentées sur la figure 39, *a* et *b*.

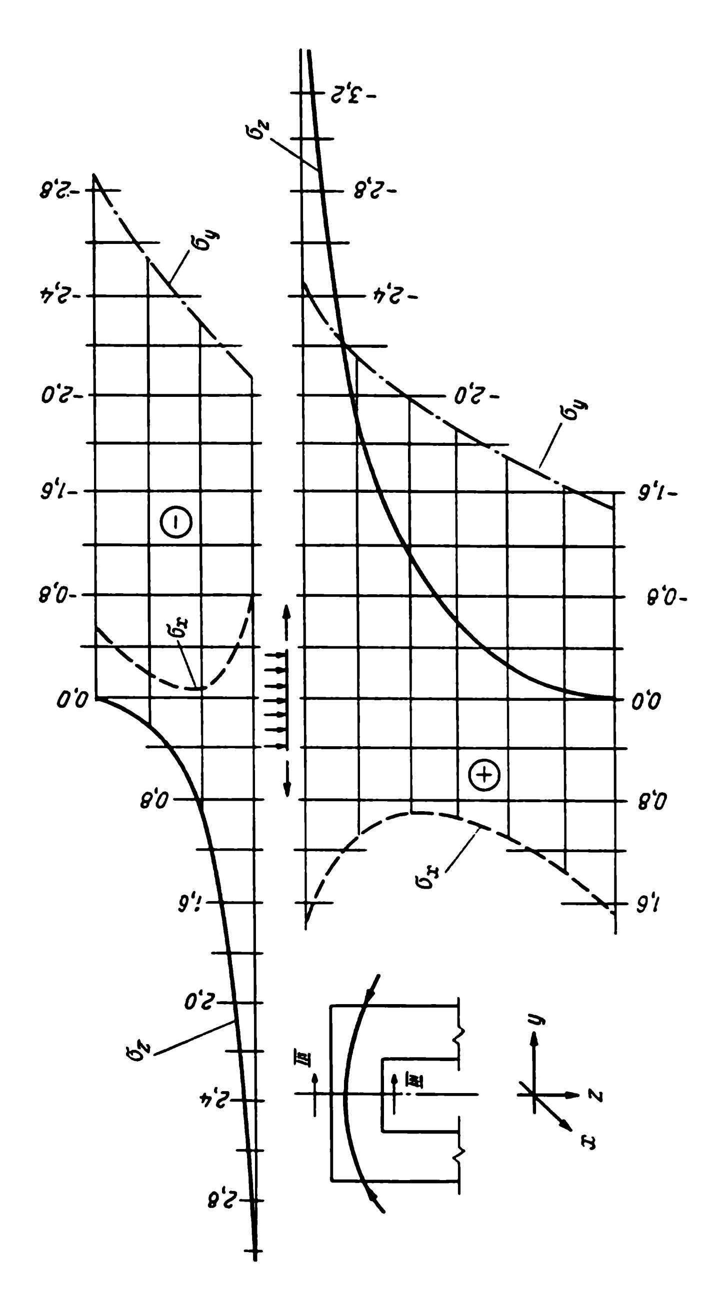



Fig. 37. Diagrammes des contraintes sur l'axe de rotation pour la variante I.

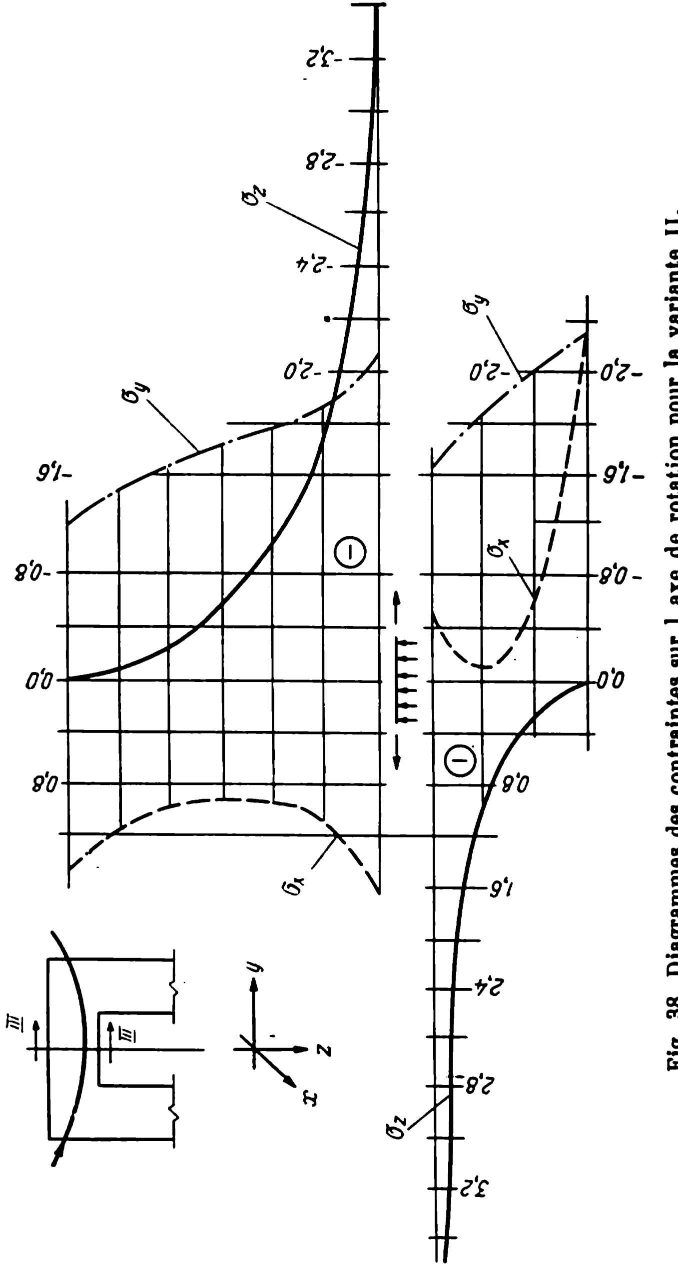



Fig. 38. Diagrammes des contraintes sur l axe de rotation pour la variante II.

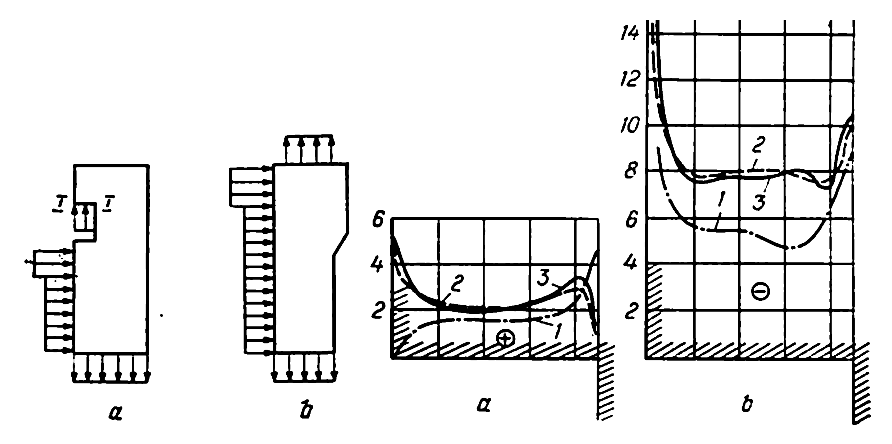



Fig. 39. Schémas de chargement des corps à symétrie axiale de configuration complexe.

Fig. 40. Diagrammes de la composante $\varphi_r$ (*a*) et de la composante $\varphi_z$ (*b*) dans la section I-I du corps de la fig. 39, *a* pour différents nombres de points de calcul.

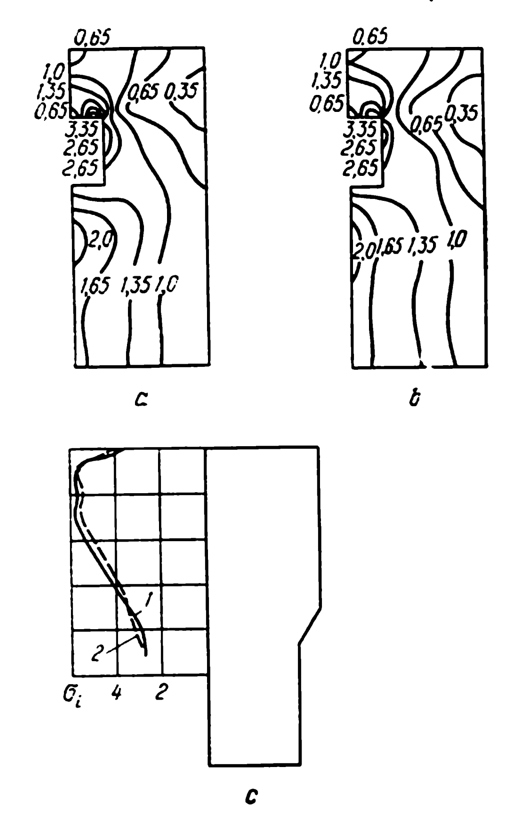



Fig. 41. Contraintes $\sigma_i$ pour le schéma 39, *a*, obtenues par calcul (*a*) et par la méthode de photo-élasticité (*b*); (*c*) — contraintes $\sigma_i$ pour le schéma 39, *b* : 1 — valeurs calculées, 2 — valeurs expérimentales.

Sur la figure 40 sont données les valeurs des composantes des densités $\varphi_r$ (*a*) et $\varphi_z$ (*b*) dans la section I-I pour le corps montré sur la figure 39, *a* pour différents nombres de points dans la section méridionale. A la courbe 1 correspondent 45 points, à la courbe 2, 57 points et à la courbe 3, 64 points. Sur la figure 41, *a* et *b* sont représentées les valeurs $\sigma_i$ pour le corps de la figure 39, *a*, obtenues par calcul (*a*) et par la méthode de photo-élasticité (*b*). La figure 41, *c* donne les valeurs $\sigma_i$ sur la surface intérieure du corps montré sur la figure 39, *b*. La courbe 1 est obtenue par calcul, la courbe 2, par l'expérience.

# CONCLUSION

Le matériel exposé dans ce livre montre de façon convaincante les possibilités qu'offre l'appareil des équations intégrales pour la résolution des problèmes de l'élasticité. Le cadre restreint de l'ouvrage et son orientation générale n'ont pas permis aux auteurs d'exposer certaines orientations où l'on utilise également cet appareil et qui constituent une généralisation évidente des approches que nous avons considérées. Il s'agit en premier lieu de la théorie des oscillations périodiques (cf. par exemple V. Kupradze [1], T. Guéguélia et autres [1]), de la théorie de la déformation des milieux anisotropes (cf. par exemple S. M. Vogel, F. J. Rizzo *[1], M. D. Snyder, T. A. Cruse *[1]).

Les auteurs n'ont pas exposé non plus certaines méthodes dans lesquelles l'appareil des équations intégrales de deuxième espèce apparaît comme outil auxiliaire à l'une des étapes intermédiaires.

Les méthodes des transformations intégrales (cf. par exemple Ya. Ufland [1]) qui permettent de résoudre effectivement des problèmes pour des domaines de forme spéciale sont largement développées. Des problèmes mixtes et ceux relatifs à des domaines présentant des coupures se laissent réduire à des équations intégrales de première espèce à noyaux discontinus (les équations dites duales) qui sont ensuite ramenées, à l'aide d'une représentation spéciale de la fonction inconnue, à des équations intégrales de deuxième espèce. Remarquons que l'on retrouve ces mêmes équations en utilisant l'appareil des équations duales en séries (cf. par exemple V. Parton, E. Morozov [1]).

Un grand nombre de problèmes se laissent résoudre à l'aide d'une méthode approchée dite de factorisation de la relation fonctionnelle qui apparaît au cours de l'application de la transformation intégrale à l'une des classes d'équations intégrales de première espèce (cf. par exemple B. Noble *[1]).

On n'a pas étudié non plus dans cet ouvrage les méthodes de résolution des équations intégrales de première espèce auxquelles peuvent être ramenés sans efforts certains problèmes de l'élasticité. On sait

(cf. par exemple A. Tikhonov, V. Arsénine [1]) que la résolution de ces équations par les méthodes approchées traditionnelles conduit à des algorithmes instables et nécessite par conséquent le recours à des artifices spéciaux (les algorithmes de régularisation).

L'attention des chercheurs est également attirée par les problèmes relatifs à des corps comportant des renforcements, c'est-à-dire les problèmes pour des corps homogènes par morceaux dans lesquels l'étendue du domaine à module d'élasticité élevé est beaucoup plus faible que celle du domaine principal. Il n'est donc pas rationnel de déterminer l'état de contrainte des domaines de ce genre par des méthodes générales (cf. §§ 22, 35). On propose pour la résolution de problèmes de ce genre des méthodes approchées spéciales qui font appel à la mécanique des constructions pour déterminer les contraintes dans le renforcement pour passer ensuite à un problème aux limites auxiliaire pour le domaine principal. Il est alors possible à cette étape d'utiliser efficacement les équations intégrales (cf. par exemple G. Savine, V. Toultchi [1], G. Savine, N. Fleichman [1]).

On sait que certaines méthodes de résolution des problèmes de la mécanique des milieux continus se ramènent au cours des étapes intermédiaires, à des problèmes de l'élasticité linéaire. Rappelons l'application en théorie de la plasticité (théorie de la déformation) de la méthode des solutions élastiques (cf. A. Ilioucline [1]). Dans l'article de J. L. Swedlow et T. A. Cruse *[1] une approche similaire est étendue à la théorie de l'écoulement. Ces problèmes se laissent résoudre, sous certaines réserves à l'aide des équations intégrales. Il est évident que pour des milieux à rhéologie plus complexe on peut utiliser (sous telle ou telle forme) la méthode des solutions élastiques.

Les problèmes de l'élasticité relatifs à des milieux dont les coefficients de Lamé sont à variation continue ont une grande importance pratique. Remarquons que pour certaines restrictions sur le comportement de ces coefficients, la solution peut être ramenée à une étude successive, étape par étape, de problèmes auxiliaires pour les milieux homogènes. Des approches générales se dégagèrent pour la résolution directe des problèmes relatifs aux milieux non homogènes grâce aux représentations intégrales (cf. Furuhashi Rozo, Kataoka Masoharu *[1]).

Nous avons donc tout lieu d'espérer que les méthodes numériques de résolution des équations intégrales qui ouvrent d'énormes possibilités pour une étude efficace de nombreux problèmes de la mécanique des milieux continus attireront l'attention d'un nombre toujours plus grand de chercheurs.

# BIBLIOGRAPHIE

## Auteurs russes


Aksentian O.
Аксентян О. К.

1. Особенности напряжённо-деформированного состояния плиты в окрестности ребра. ПММ, 31 № 1, 1967.

Alexandrov A.
Александров А. Я.

1. Об одном приближённом методе решения плоских контактных задач теории упругости. Труды Новосибирского ин-та инж. ж.-д. транспорта, вып. XI, 1955.
2. Некоторые решения осесимметричных контактных задач теории упругости. Труды Новосибирского ин-та инж. ж.-д. транспорта, вып. XI, 1955.
3. Некоторые зависимости между решениями плоской и осесимметричной задач теории упругости при помощи аналитических функций. ДАН СССР, 129, № 4, 1959.
4. Решение осесимметричных задач теории упругости при помощи аналитических функций. ДАН СССР, 139, № 2, 1961.
5. Решение некоторых пространственных задач теории упругости при помощи аналитических функций. В сб. «Симпозиум по механике сплошной среды и родственные проблемы анализа», Аннот. докл., Тбилиси, 1971.
6. Решение некоторых классов трёхмерных задач теории упругости при помощи аналитических функций. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», «Наука», 1972.
7. Решение основных трёхмерных задач теории упругости для тел произвольной формы путем численной реализации метода интегральных уравнений. ДАН СССР, 208, № 2, 1973.

Alexandrov A., Soloviev Yu.
Александров А. Я., Соловьёв Ю. И.

1. О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к интегральным уравнениям. В сб. «Проблемы механики твёрдого деформир. тела», «Судостроение», Л., 1970.

Alexéeva E., Perline P., Sternchis A.
Алексеева Е. Г., Перлин П. И., Штерншис А. З.

1. Применение метода потенциала при решении некоторых задач о напряжённом состоянии бетонного корпуса реактора. Сборник трудов МИСИ, № 188. Исследование напряжённого состояния и прочности строительных конструкций АЭС методом фотоупругости и численными методами. 1982.

Alexidze M., Samsonia K.
Алексидзе М. А., Самсония К. Н.

1. Об одном алгоритме решения пространственных граничных задач теории упругости. Семинар Ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та, Аннот. докл., № 6, 1972.
2. Автоматизация одного метода решения пространственных задач статики теории упругости. В сб. «Численные методы механики сплошных сред», IV, № 5, 1973.

Aliaoutdinov M., Davydova N.
Аляутдинов М. И., Давыдова Н. А.

1. Прямое решение стационарной задачи термоупругости для тел вращения произвольной формы при осеантисимметричных граничных условиях. Труды II Всесоюзн. конф. по численным методам задач теории упругости и пластичности, Новосибирск, 1971.

Aliev B.
Алиев Б.

1. Регуляризующие алгоритмы для устойчивого нормального решения уравнения II рода на спектре. ЖВМ и МФ, 10, № 3, 1970.

Amenzadé Yu.
Амензаде Ю. А.

1. К проблеме напряжённой посадки кусочно-однородных сред. В сб. «Контактные задачи и их инженерные приложения», Докл. конф., М., 1969.
2. Вдавливание штампа в полуплоскость с включениями. ПММ, 36, № 5. 1972.
3. Плоская задача теории упругости. Изд-во АГУ, 1975.

Amenzadé Yu., Agaev T.
Амензаде Ю. А., Агаев Т. Ю.

1. Напряжённое состояние от запрессовки эллиптической шайбы в круглую пластинку при смешанных условиях на внешнем контуре пластинки. Уч. зап. Азерб. ун-та, Серия физ-мат. наук, № 1, 1972.

Amenzadé Yu., Boubouteishvili O.
Амензаде Ю. А., Бубутейшвили О. Л.

1. Действия жёсткого штампа на полуплоскость, ослабленную эллиптическим отверстием. Изв. АН Аз. ССР, Серия физ.-техн. и мат. наук, № 1, 1972.

Andreikiv A., Panassiouk V.
Андрейкив А. Е., Панасюк В. В.

1. Упругое равновесие тела, ослабленного системой круговых трещин, расположенных вдоль одной плоскости. ДАН СССР, 197, № 2, 1971.
2. Смешанная задача теории упругости для полупространства с круговыми линиями раздела краевых условий. Изв. АН СССР, Механика твёрдого тела, № 3, 1972.

Andreikiv A., Panassiouk V., Stadnik M.
Андрейкив А. Е., Панасюк В. В., Стадник М. М.

1. Разрушение хрупких призматических брусьев, ослабленных внутренними круговыми трещинами. Проблемы прочности, № 10, 1972.

Andreikiv A., Stadnik M.
Андрейкив А. Е., Стадник М. М.

1. Изгиб прямоугольного хрупкого бруса, ослабленного внутренней трещиной. Физ.-хим. мех. материалов, 8, № 4, 1972.

Andrianov N.
Андрианов Н. Ф.
1. Решение пространственных задач теории упругости методом теории потенциала. Автореферат диссертации, Московский ин-т электронного машиностроения, 1975.

Andrianov N., Perline P.
Андрианов Н. Ф., Перлин П. И.
1. Решение второй основной пространственной задачи для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями. Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып. 4, 1976.

Aramanovitch I.
Араманович И. Г.
1. Задача о давлении штампа на упругую полуплоскость с круговым отверстием. ДАН СССР, 112, № 4, 1957.

Aramanovitch I., Fotieva N., Lytkine V.
Араманович И. Г., Фотиева Н. Н., Лыткин В. А.
1. Вдавливание жёсткого штампа в полуплоскость с круговым отверстием. В сб. «Контактные задачи и их инженерные приложения», Докл. конф., М., 1969.

Arganykh I.
Аржаных И. С.
1. Векторные потенциалы изотропного упругого тела. Труды ин-та матем. и механ. АН Уз.ССР, вып. 8, 1951.

Avétissian A., Tchobanian K.
Аветисян А. Г., Чобанян К. С.
1. Характер напряжений в заделанной окрестности края поверхности соединения составного тела, нагруженного в условиях плоской задачи теории упругости. Изв. АН Арм.ССР, Механика, 25, № 6, 1972.

Bakhvalov N.
Бахвалов Н. С.
1. Численные методы. «Наука» т. 1, 1973.
(Bakhvalov N. Méthodes numériques. Editions Mir, 1976).

Basheleishvili M., Guéguélia T.
Башелейшвили М. О., Гегелиа Т. Г.
1. Об основных пространственных граничных задачах для составных изотропных упругих сред. ДАН СССР, 160, № 1, 1965.

Bélenki M.
Беленький М. Я.
1. Некоторые осесимметрические задачи теории упругости. ПММ, 24, № 3, 1960.

Bélonossov S.
Белоносов С. М.
1. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Изд-во СО АН СССР, 1962.
2. О численном решении линейных краевых задач теории упругости методами теории потенциала. В сб. «III Всесоюзн. съезд по теоретической и прикладной механике», Аннот. докл., М., 1968.

Bérézine I., Jidkov N.
Березин И. С., Жидков Н. П.

1. Методы вычислений. «Наука», т. 1, 1966.

Bondaréva V.
Бондарева В. Ф.

1. О действии осесимметричной нормальной нагрузки на упругий шар. ПММ, 33, № 6, 1969.
2. К теории контакта упругих тел. Труды ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений, вып. 8 (38), 1971.
3. Контактная задача для весомого полушара. Труды метрол. ин-тов СССР, ВНИИ физико-технических и радиотехнических измерений, вып. 119 (179), 1974.

Bouïvol V.
Буйвол В. М.

1. Бигармоническая задача для многосвязных систем с циклической симметрией. Прикладная механика, 5, № 3, 1959.

Bourago Yu., Mazia V., Sapozhnikova V.
Бураго Ю. Д., Мазья В. Г., Сапожникова В. Д.

1. К теории потенциалов двойного и простого слоя для областей с нерегулярными границами. В сб. «Проблемы математического анализа. Краевые задачи и интегральные уравнения», ЛГУ, 1966.

Bourtchouladze T.
Бурчуладзе Т. В.

1. Граничные задачи теории упругости для многосвязных областей. Труды Тбилисского ун-та, 129, 1968.

Chafarenko E.
Шафаренко Е. М.

1. Напряжённое состояние в упругом пространстве, ослабленном двумя кубическими полостями. МТТ, 4, 1979.
2. Концентрация напряжений в окрестности двух полостей. Прикладные проблемы прочности и пластичности, № 10, 1981.

Chafarenko E., Sternchis A.
Шафаренко Е. М., Штерншис А. З.

1. Методы повышения эффективности решения сингулярных интегральных уравнений пространственных задач теории упругости. Тезисы Всесоюзной конференции по теории упругости. Ереван. Изд-во АН Арм.ССР, 1979.

Chalioukhine Yu.
Шалюхин Ю. Н.

1. Применение методов плоской задачи теории упругости к исследованию напряжённого состояния элементов корпусов судов. Автореферат диссертации, 1975.

Datsychine A.
Дацышин А. П.

1. О предельном равновесии полуплоскости с поверхностной трещиной. Физико-химическая механика материалов, 5, № 6, 1969.

Datsychine A., Savrouk M.
Дацышин А. П., Саврук М. П.
1. Система произвольно ориентированных трещин. ПММ, 37, № 2, 1973.
2. Периодическая задача теории трещин. Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела, № 5, 1974.
3. Интегральные уравнения плоской задачи теории трещин. ПММ, 38, № 4, 1974.

Doudnikov V., Morozov N.
Дудников В. А., Морозов Н. Ф.
1. О задачах плоской моментной теории упругости для областей с угловыми точками контура. ДАН СССР, 225, № 3, 1975.

Efimov A., Vorobiev V.
Ефимов А. Б., Воробьёв В. Н.
1. Об одной смешанной задаче для уравнения Лапласа. Инж.-физ. ж., 26, № 5, 1974.
2. Одна смешанная задача для гармонической функции в полупространстве. ЖВМ и МФ, № 5, 1974.
3. Решение некоторых пространственных контактных задач теории упругости. Труды III Всесоюзн. конф. по численным методам решения задач теории упругости и пластичности, ч. I, Новосибирск, 1974.

Erjanov J., Toussoupov M.
Ержа́нов Ж. С., Тусупов М. Т.
1. К решению двоякопериодической задачи теории упругости. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 2, «Наукова думка», 1968.

Eskine G.
Эскин Г. И.
1. Общие краевые задачи для уравнений главного типа в плоской области с угловыми точками. УМН, 18, вып. 3 (117), 1963.

Fan Van Hap
Фан Ван Хап
1. О применении метода замены интеграла конечной суммой к приближённому решению сингулярных интегральных уравнений. Вестник МГУ, Мат. и мех., № 3, 1969.

Filchtinski L.
Фильштинский Л. А.
1. Двоякопериодическая задача теории упругости для изотропной среды, ослабленной конгруэнтными группами произвольных отверстий. ПММ, 36, № 4, 1972.
2. К теории упругости неоднородных сред с регулярной структурой. ПММ, 37, № 2, 1973.

Fridman M.
Фридман М. М.
1. Решение общей задачи об изгибе тонкой изотропной упругой плиты, опёртой вдоль края. ПММ, 16, № 4, 1952.

Gabdoulkhaev B.
Габдулхаев Б. Г.
1. Приближённое решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур. ДАН СССР, 179, № 2, 1968.

2. Кубатурные формулы для многомерных сингулярных интегралов. I. Изв. на матем. ин-т при Бълг. АН, 11, 1970.
3. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и метод механических квадратур для сингулярных интегральных уравнений. В сб. «Конструктивная теория функций. Труды Междунар. конф. по конструктивной теории функций», Варна, 19-25 мая 1970 г., София, 1971.

Gabdoulkhaev B., Douchkov P.
Габдулхаев Б. Г., Душков П. И.
1. О прямых методах решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Изв. вузов, Математика, № 7 (134), 1973.

Gakhov F.
Гахов Ф. Д.
1. Краевые задачи. Физматгиз, 1963.

Galine L.
Галин Л. А.
1. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.

Gavelia S.
Гавеля С. П.
1. О сохранении разрешимости граничных задач теории пологих оболочек при приведении их к интегральным уравнениям. Изв. вузов, Математика, № 5, (84). 1969.

Gavelia S., Melnikov Yu.
Гавеля С. П., Мельников Ю. А.
1. Упругое равновесие тороидальной оболочки при локальных тепловых воздействиях. В сб. «Теория оболочек и пластин», «Наука», 1973.

Goldstein R., Klein I., Eskine G.
Гольдштейн Р. В., Клейн И. С., Эскин Г. И.
1. Вариационно-разностный метод решения некоторых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений трёхмерных задач теории упругости. Ин-т проблем механики АН СССР. Препринт № 33. 1973.

Goldstein R., Savova L.
Гольдштейн Р. В., Савова Л. Н.
1. Об определении раскрытия и коэффициентов интенсивности напряжений для гладкой криволинейной трещины в упругой плоскости. Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела, № 2, 1972.

Goldstein R., Salganik R.
Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.
1. Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле. Изв. АН СССР, Механика твёрдого тела, № 3, 1970.

Gontcharova G.
Гончарова Г. В.
1. Плоская задача теории упругости в области с угловыми точками. Изв. АН Азерб. ССР, Серия физ.-техн. и мат. наук, 1, 1972.

Gorguidze A., Roukhadze A.
Горгидзе А. Я., Рухадзе А. К.
1. Об одном численном решении интегральных уравнений плоской задачи теории упругости. Сообщ. АН Груз.ССР, 1, № 4, 1940.

Grigoliouk E., Filchtinski L.
Григолюк Э. И., Фильштинский Л. А.

1. Перфорированные пластины и оболочки. «Наука», 1970.

Guéguélia T.
Гегелиа Т. Г.

1. Свойства дифференцируемости решения многомерных сингулярных интегральных уравнений. Труды Грузинского политехнического ин-та, № 1 (81), 1962.
2. О некоторых основных пространственных граничных задачах теории упругости. Труды Тбилисского математического ин-та, 28, 1962.

Gunter N.
Гюнтер Н. М.

1. Теория потенциала и её применения к основным задачам математической физики. Гостехиздат, 1953 (Gunter N. La théorie du potentiel et ses applications aux problèmes fondamentaux de la physique mathématique. Paris, Gauthier-Villars, 1934).

Ichkov A., Chalioukhine Yu.
Ишков А. А., Шалюхин Ю. Н.

1. Определение напряжённого состояния в пластине с вваренной упругой вставкой прямоугольного сечения. Труды Калининградского технического ин-та рыбной промышленности и хозяйства, вып. 33, 1970.

Iliouchine A.
Ильюшин А. А.

1. Пластичность. Гостехиздат, 1948.

Itskovitch I.
Ицкович И. А.

1. Задачи эквивалентности в теории двумерных сингулярных уравнений. Уч. зап. Кишинёвского ун-та, 5, 1952.

Ivanov V.
Иванов В. В.

1. Теория приближённых методов и её применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. «Наукова думка», Киев, 1968.

Kakhniashvili N.
Кахниашвили Н. С.

1. Исследование плоских задач теории упругости методом потенциала. Труды Тбилисского ун-та, 50, 1953.

Kalandia A.
Каландия А. И.

1. Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки. ПММ, 16, № 3, 1952.
2. Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки. ПММ, 16, № 5, 1952.
3. Замечания об особенности упругих решений вблизи углов. ПММ, 33, № 1, 1969.
4. Математические методы двумерной упругости. «Наука», 1973 (Kalandia A. Mathematical methods of two-dimensional elasticity. Mir Publishers, Moscow, 1975).

Kalandia A., Lourié A., Mandjavidze G., Prokopov V., Ufland Ya.
Каландия А. И., Лурье А. И., Манджавидзе Г. Ф., Прокопов В. К., Уфлянд Я. С.

1. Линейная теория упругости. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», т. 3, «Наука», 1972.

Kalinine A.
Калинин А. А.

1. Прямое решение системы интегральных уравнений второй краевой задачи теории упругости для шара. Труды Витебского ин-та лёгкой промышленности, № 1, 1970.

Kantorovitch L.
Канторович Л. В.

1. О приближённом вычислении некоторых типов определённых интегралов и других применениях метода выделения особенностей. Математический сборник, 41, вып. 2, 1934.
2. Функциональный анализ и прикладная математика. УМН, 3, вып. 6 (28), 1948.

Kantorovitch L., Krylov V.
Канторович Л. В., Крылов В. И.

1. Приближённые методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.

Kartsivadze I.
Карцивадзе И. Н.

1. Основные задачи теории упругости для упругого круга. Труды Тбилисского математического ин-та, XII, 1943.

Khalilov Z.
Халилов З. И.

1. Решение общей задачи изгиба опёртой пластинки. ПММ, 14, № 4, 1950.

Khatsirévitch I.
Хациревич И. Х.

1. Применение метода Вейля к решению плоской статической задачи теории упругости. ПММ, 7, 1942.

Khoutorianski N.
Хуторянский Н. М.

1. Об одном методе решения пространственных задач упругого равновесия. Прикладные проблемы прочности и пластичности, ГГУ, вып. 5, 1976.

Khvoles A.
Хволес А. А.

1. Сингулярные интегральные уравнения в пространствах Липшица. Сообщения АН Груз. ССР, 76, № 1, 1974.

Kiltchevski N.
Кильчевский Н. А.

1. Интегро-дифференциальные и интегральные уравнения равновесия тонких упругих оболочек вращения. ПММ, 23, № 1, 1959.

Kisler L.
Кислер Л. Н.

1. Об определении поля напряжений в весомой полуплоскости с эллиптическим и круговым отверстием. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 2, 1961.

Koldorkina V.
Колдоркина В. А.
1. О трёхмерных задачах теории упругости в кусочно-гладких областях. Изв. вузов, Математика, № 1, 1973.

Kondratiev V.
Кондратьев В. А.
1. Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками. Труды Московского математического об-ва, 16, 1967.

Kopassenko V., Touebaev M.
Копасенко В. В., Туебаев М. К.
1. Напряжения в симметрично-слоистой пластинке, ослабленной центральной трещиной. ПММ, 37, № 2, 1973.

Kopeïkine Yu.
Копейкин Ю. Д.
1. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругих тел. Автореферат диссертации, 1969.
2. Применение бигармонических потенциалов в краевых задачах статики упругого тела. В сб. «Упругость и неупругость», вып. 1, МГУ, 1971.
3. Прямое решение двух- и трёхмерных задач теории упругости и пластичности при помощи сингулярных интегральных уравнений метода потенциала. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», 5, № 2, Новосибирск, 1974.

Kopeïkine Yu., Aliaoutdinov M., Bormot Yu.
Копейкин Ю. Д., Аляутдинов М. И., Бормот Ю. Л.
1. Решение двумерной задачи расчёта элементов конструкций. В сб. «Материалы по металлическим конструкциям», вып. 18, Стройиздат, 1975.

Korneitchouk A.
Корнейчук А. А.
1. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов. В сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», Доп. к ЖВМ и МФ, 4, № 4, 1964.

Kostylev V., Andrianov N.
Костылев В. Г., Андрианов Н. Ф.
1. Решение второй основной задачи теории упругости в осесимметричной постановке методом потенциала. Численные методы механики сплошной среды, т. 9, № 5, 1978.

Koublanovskaïa V.
Кублановская В. Н.
1. Применение аналитического продолжения посредством замены переменных в численном анализе. Труды Математического ин-та им. Стеклова, 53, 1959.

Koudriavtsev B., Parton V.
Кудрявцев Б. А., Партон В. З.
1. Квазистатическая температурная задача для плоскости с разрезом. Проблемы прочности, № 2, 1970.
2. Первая основная задача теории упругости для двоякопериодической системы разрезов. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», «Наука», 1972.

Koulich V.
Кулиш В. Г.

1. Упругое равновесие круглого диска с запрессованными шайбами. В сб. «Научно-техническая конф. Ждановского металлургического ин-та, посвящённая 100-летию со дня рождения В. И. Ленина», Тезисы докл., Жданов, 1970.

Koulich V., Obodovski B.
Кулиш В. Г., Ободовский Б. А.

1. Исследование напряжений в теле фланцевых муфт. В сб. «II Всесоюзн. конф. по прочности металлургических машин», Тезисы докл., Жданов, 1969.

Kressine G., Mazia V.
Кресин Г. И., Мазья В. Г.

1. О существенной норме оператора типа потенциала двойного слоя в пространстве $C_m$. ДАН СССР, 246, № 2, 1979, с. 298.

Krestine G., Libatski L., Yaréma S.
Крестин Г. Л., Либацкий Л. Л., Ярема С. Я.

1. Напряжённое состояние диска с диаметральной трещиной. Физ.-хим. механика материалов, 8, № 2, 1972.

Krioukova N.
Крюкова Н. М.

1. Об одной плоской задаче теории упругости для изотропной среды Инж. журнал, Механика твёрдого тела, № 5, 1966.
2. Растягиваемая среда, ослабленная тремя круговыми отверстиями. Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых, № 2, 1967.

Kupradze V.
Купрадзе В. Д.

1. К решению задачи Дирихле для многосвязной области. Сообщ. АН Груз. ССР, 1, № 8, 1940.
2. Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний. УМН, 8, № 3 (55), 1953.
3. Методы потенциала в теории упругости, Физматгиз, 1963 (Kupradze V. Potential methods in the theory of elasticity. Programme of scientific translations, Jérusalem, 1965).
4. О приближённом решении задач математической физики. УМН, 22, № 2, 1967.
5. К решению трёхмерной смешанной граничной задачи теории упругости. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», «Наука», 1972.

Kupradze V., Alexidze M.
Купрадзе В. Д., Алексидзе М. А.

1. Метод функциональных уравнений для приближённого решения некоторых граничных задач. ЖВМ и МФ, 4, № 4, 1964.

Kupradze V., Guéguélia T., Basheleishvili M., Bourtchouladze T.
Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.

1. Трёхмерные задачи математической теории упругости. «Наука», 1976 (Kupradze V., Gegelia T., Basheleishvili M., Burchuladze T. Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity. North-Holland, Amsterdam, 1979).

Lavrentiev M.
Лаврентьев М. А.
1. О построении потока, обтекающего дугу заданной формы. Труды ЦАГИ, вып. 118, 1932.

Léonov M.
Леонов М. Я.
1. К теории расчёта упругих оснований. ПММ, 3, № 2, 1939.
2. Некоторые задачи и приложения теории потенциала. ПММ, 4, № 5-6, 1940.
3. Общая задача о давлении кругового штампа на упругое полупространство. ПММ, 17, № 1, 1953.
4. Решение одного интегрального уравнения теории ньютоновского потенциала. Украинский математический журнал, V, № 1, 1953.

Léonov M., Tchoumak K.
Леонов М. Я., Чумак К. Т.
1. Тиск під штампом, близьким до кругого в плане. Прикладная механіка. 5, № 2, 1959.

Libatski L.
Либацкий Л. Л.
1. Применение сингулярных интегральных уравнений для определения критических условий в пластинах с трещинами. Физ.-хим. механика материалов, 1, № 4, 1965.
2. Всестороннее растяжение круглого диска с внешней радиальной трещиной. Физ-хим. механика материалов, 5, № 6, 1969.
3. Предельное равновесие кругового диска с внешними радиальными трещинами. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 3, «Наукова думка», 1971.

Libatski L., Baranowitch S.
Либацкий Л. Л., Баранович С. Т.
1. О предельном равновесии пластинки, ослабленной круговым отверстием и трещинами. Динамика и прочность машин. Республиканский межведомственный науч.-техн. сборник, вып. 8, 1968.

Libatski L., Bida M.
Либацкий Л. Л., Бида М. И.
1. О предельном равновесии пластинки, ослабленной круговым отверстием и трещинами. Динамика и прочность машин. Респ. межвед. науч.-тех, сб., вып. 8, 1968.

Likhovtsev V.
Лиховцев В. М.
1. Определение перемещений и напряжений для заглубленного штампа. Автореферат диссертации, НИИ оснований, 1976.

Likhovtsev V., Perline P.
Лиховцев В. М., Перлин П. И.
1. Решение пространственных задач теории упругости для полубесконечных областей. Труды МИХМ, № 65, 1976.

Linkov A.
Линьков А. М.
1. Интегральные уравнения теории упругости для плоскости с разрезами, нагруженными самоуравновешивающимися системами сил. ДАН СССР, 218, № 6, 1974.

Linkov A., Merkoulov V.
Линьков А. М., Меркулов В. А.

1. Задачи об изгибе пластин с разрезами. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 1, 1975.

Liousternik L., Sobolev V.
Люстерник Л. А., Соболев В. И.

1. Элементы функционального анализа. «Наука», 1965.

Lopatinski Ya.
Лопатинский Я. Б.

1. Об одном способе приведения граничных задач для систем дифференциальных уравнений к регулярным интегральным уравнениям. Украинский математический журнал, V, № 2, 1953.

Lourié A.
Лурье А. И.

1. Пространственная задача теории упругости. Гостехиздат, 1955.

Magnaradze L.
Магнарадзе Л. Г.

1. Основные задачи плоской теории упругости для контура с угловыми точками. Труды Тбилисского математического ин-та, IV, 1938.
2. Некоторые граничные задачи математической физики для поверхности с угловыми линиями. Труды Тбилисского математического ин-та, VII, 1940.

Mandjavidze G.
Манджавидзе Г. Ф.

1. Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости. ПММ, 15, № 3, 1951.

Markouchévitch A.
Маркушевич А. И.

1. Теория аналитических функций. Гостехиздат, 1950.

Martchouk G.
Марчук Г. И.

1. Методы вычислительной математики. Новосибирск, «Наука», 1973. (Martchouk G. Méthodes de calcul numérique. Editions Mir, 1980).

Mazia V., Nazarov S., Plaménevski B.
Мазья В. Г., Назаров С. А., Пламеневский Б. А.

1. Об асимптотике решения эллиптических краевых задач при варьировании области вблизи конечной точки. ДАН СССР, 249, II, 1979.

Mazia V., Plaménevski B.
Мазья В. Г., Пламеневский Б. А.

1. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи конических точек. ДАН СССР, 219, № 3, 1974.
2. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в конусе. Зап. научн. семинаров ЛОМИ. т. 52. Краевые задачи мат. физики и смежные вопросы теории функций. Вып. 8, 1975.
3. О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач вблизи ребра. ДАН СССР, 229, № 1, 1976.
4. Коэффициенты в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с конической точкой, 79, 1977.

Mazia V., Sapozhnikova V.
Мазья В. Г., Сапожникова В. Д.

1. Замечание о регуляризации сингулярной системы изотропной теории упругости. Вестник Ленинградского ун-та, Серия мат., мех. и астр., вып. 2, № 7, 1964.

Mikhline S.
Михлин С. Г.

1. Плоская задача теории упругости для неоднородной среды. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 66, 1935.
2. Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений. Математический сборник, 3 (45), № 1, 1938.
3. Метод наименьших квадратов в задачах математической физики. Вестник Ленинградского ун-та, Серия физ.-мат., вып. 16, 1948.
4. Интегральные уравнения и их приложения. Гостехиздат, 1949. (Mikhlin S. Integral equations and their applications. Pergamon Press, 1957).
5. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
6. Об одном методе приближенного решения интегральных уравнений. Вестник Ленинградского ун-та, Серия физ.-мат., № 13, 1974.

Mikhline S., Smolitski H.
Михлин С. Г., Смолицкий Х. Л.

1. Приближенные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. «Наука», 1965.

Mironenko N.
Мироненко Н. И.

1. О равновесии бесконечной полосы с круговым отверстием. Прикладная механика, 8, № 1, 1972.

Mochkine P.
Мошкин П. Н.

1. Задача о весовой упругой полуплоскости с двумя эллиптическими отверстиями. Уч. зап. Новосибирского педагогического ин-та, вып. 13, 1958.

Morozov N.
Морозов Н. Ф.

1. Избранные двумерные задачи теории упругости. Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1978, с. 182.

Mossakovski V.
Моссаковский В. И.

1. Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 18, № 2, 1954.

Muskhelishvili N.
Мусхелишвили Н. И.

1. О численном решении плоской задачи теории упругости. Труды Тбилисского математического ин-та, 1, 1937.
2. О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала. ПММ, 4, № 4, 1940.
3. Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5-е, «Наука», 1966. (Muskhelishvili N. Some basic problems of the mathematical theory of elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1963).
4. Сингулярные интегральные уравнения. Изд. 3-е «Наука», 1968. (Muskhelishvili N. Singuläre Integralgleichungen. Berlin, And. Verlag, 1965).

Naïschtut Yu.
Найштут Ю. С.

1. Об одном способе расчета пластинок с отверстиями и его численной реализации. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 1, 1970.

Nakhibaev M.
Нахибаев М. Х.

1. Определение напряженного состояния диска с двумя круговыми отверстиями, сопряженного посредством натяга с круглыми шайбами из другого материала. Уч. зап. Азербайджанского ун-та, Серия физ.-мат. наук, № 5, 1967.

Natanson I.
Натансон И. П.

1. Конструктивная теория функций. Гостехиздат, 1949.

Natanson V.
Натансон В. Я.

1. О напряжениях в растягиваемой пластине, ослабленной отверстиями, расположенными в шахматном порядке. Математический сборник, 42, вып. 5, 1935.

Natroshvili D.
Натрошвили Д. Г.

1. Эффективное решение основных граничных задач статики для однородного изотропного упругого шара. Труды Ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та, 3, 1972.
2. Главная контактная задача для сферы. Семинар Ин-та прикладной математики Тбилисского ун-та, Аннот. докл., № 8, 1973.

Nazarov S.
Назаров С. А.

1. О сглаживании особенностей границы в двумерных задачах теории упругости. «Исследования по упругости и пластичности», № 12, 1978.

Ougodtchikov A.
Угодчиков А. Г.

1. Исследование двумерных задач теории упругости для тел сложной формы. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», «Наука», 1972.

Panassiouk V.
Панасюк В. В.

1. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. «Наукова думка», 1968.

Panassiouk V., Andreikiv O., Stadnik M.
Панасюк В. В., Андрейків О. Э., Стадник М. Н.

1. Визначення граничної рівноваги крихкого тіла, ослабленного системою тріщин близьких у плані до кругових. Доповіді АН УРСР, А, № 6, 1973.

Panassiouk V., Datsychine A.
Панасюк В. В., Дацышин А. П.

1. О предельном равновесии полуплоскости с произвольно ориентированной трещиной, выходящей на ее границу. Физ.-хим. мех. материалов, 7, № 6, 1971.

Panassiouk V., Dmitrakh N.
Панасюк В. В., Дмитрах Н. Д.

1. О предельном равновесии трехмерного хрупкого тела с внутренней плоской трещиной, имеющей в плане форму овала. Прикладная механика, 5, № 5, 1969.

Panassiouk V., Savrouk M., Datsychino A.
Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацышин А. П.

1. Система довільно орієнтованих тріщин у пружнії з коловою границею. Доповіді АН УРСР, А, 11, 1973.

Parton V.
Партон В. З.

1. Об одной оценке взаимного упрочения трещин при их шахматном расположении. ЖПМ и ТФ, № 5, 1965.
2. Двоякопериодическая система разрезов в неограниченной упругой пластинке. В сб. «Симпозиум по механике сплошной среды и родственные проблемы анализа», Аннот. докл., Тбилиси, 1971.
3. Осесимметричная температурная задача для пространства с дискообразной трещиной. ПММ, 36, № 1, 1972.

Parton V., Morozov E.
Партон В. З., Морозов Е. М.

1. Механика упруго-пластического разрушения. «Наука», 1974. (Parton V., Morozov E. Elastic-plastic fracture mechanics. Mir Publishers, Moscow, 1978).

Parton V., Perline P.
Партон В. З., Перлин П. И.

1. Интегральные уравнения основных пространственных и плоских задач упругого равновесия. Итоги науки и техники, Серия «Механика твердого и деформируемого тела», 8, 1975.
2. Прочность тел сложной формы. В кн. — Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа.— М.: МИХМ, 1978.
3. Методы математической теории упругости.— М.: «Наука», 1981.

Parton V., Tchérépanov G.
Партон В. З., Черепанов Г. П.

1. Механика разрушения. В сб. «Механика в СССР за 50 лет», «Наука», 1972.

Perline P.
Перлин П. И.

1. О свойствах бесконечных систем уравнений в задачах теории упругости двусвязных тел. Труды МФТИ, Исследование по механике и прикладной математике, 5, 1960.
2. К обобщению на пространственный случай одного способа решения основных плоских задач теории потенциала и теории упругости. ДАН СССР, 153, № 5, 1963.
3. Об одном методе решения основных пространственных задач теории потенциала и теории упругости для областей, ограниченных двумя замкнутыми поверхностями. Инженерный журнал, 4, № 1, 1964.
4. Решение первой основной осесимметричной задачи теории упругости для области, ограниченной эллипсоидом и сферой. Инженерный журнал, 4, № 2, 1964.
5. О решении основных задач теории потенциала в теории упругости для некоторых полых и составных тел. Инженерный журнал, 5, № 4, 1965.

6. К решению плоских задач теории упругости для тел с тонкостенными включениями. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 1973.
7. Об одном методе вычисления двумерных сингулярных интегралов и его применении к решению сингулярных интегральных уравнений пространственной задачи теории упругости. В сб. «Всесоюзн. школа по теоретическому исследованию численных методов механики сплошных сред», Звенигород, Тезисы докл., М., 1973.
8. К решению пространственных задач теории упругости для кусочно-однородной среды. VI Всесоюзн. конф. по прочности и пластичности. Тезисы докл., 1975.
9. Численное решение сингулярных интегральных уравнений основных задач теории упругости. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 3, 1975.
10. Применение регулярных представлений сингулярных интегралов к решению уравнений второй основной задачи теории упругости. ПММ, 40, № 2, 1976.

Perline P., Chafarenko E., Sternchis A.
Перлин П. И., Шафаренко Е. М., Штерншис А. З.
1. Некоторые вопросы применения метода потенциала к решению пространственных задач теории упругости. Современные проблемы механики и авиации.— М.: «Машиностроение», 1982.

Perline P., Chalioukhine Yu.
Перлин П. И., Шалюхин Ю. К.
1. К вопросу о численном решении интегральных уравнений теории упругости. Изв. АН Каз.ССР, Серия физ.-мат., № 1, 1976.

Perline P., Novikov A.
Перлин П. И., Новиков А. В.
1. Об одном приеме повышения эффективности численного решения задач теории упругости методом потенциала. Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. М.: МИХМ, 1980.

Perline P., Novikov A., Stoupak S.
Перлин П. И., Новиков А. В., Ступак С. Ф.
1. Применение метода потенциалов к решению пространственных задач теории упругости для несжимаемой среды. Статика сооружений. КИСИ, 1978.

Perline P., Samarov V.
Перлин П. И., Самаров В. Н.
1. Применение теории обобщенного потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами и оценке хрупкого разрушения конструкций сложной формы. Изв. АН Каз.ССР, Серия физ.-мат., № 5, 1974.
2. Применение теории потенциала к решению пространственных задач теории упругости для тел с разрезами. Прикладные проблемы прочности и пластичности, вып. 6, 1977.

Perline P., Stoupak S.
Перлин П. И., Ступак С. Ф.
1. Решение задачи теории упругости для шара, ослабленного сфероидальной полостью. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 5, 1974.

Podiltchouk Yu.
Подильчук Ю. Н.

1. Плоская эллиптическая трещина в произвольном однородном поле напряжений. Прикладная механика, 4, № 8, 1968.

Polozhij G.
Положий Г. Н.

1. О краевых задачах осесимметричной упругости. Метод P-аналитических функций комплексного переменного. Украинский математический журнал, 15, № 1, 1963.
2. Теория и применение P-аналитических и (P, Q)-аналитических функций. Изд. 2-е, «Наукова думка», 1973.

Polozhij G., Tchéméris V.
Положий Г. Н., Чемерис В. С.

1. До питания про застосування P-аналітичних функцій в осесимметричній теорії пружності. Доповіді АН УРСР, № 12, 1958.
2. Об интегральных уравнениях осесимметричной теории упругости. В сб. «Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного», Физматгиз, 1961.

Poloukhine V., Andrianov N.
Полухин В. П., Андрианов Н. Ф.

1. Решение пространственной задачи теории упругости для тел, ограниченных цилиндрическими полостями. VI Всесоюзн. конф. по прочности и пластичности. Тезисы докл., 1975.

Poloukhine V., Kostylev V., Andrianov N.
Полухин В. П., Костылев В. Г., Андрианов Н. Ф.

1. Напряженное состояние прокатного валка стана 3600. Известия вузов, Черная металлургия. I, 1980.
2. Напряженное состояние цилиндрических деталей, собранных с гарантированным натягом. Изв. вузов. Машиностроение, № 11, 1980. с. 84-89.

Prousov I.
Прусов И. А.

1. Некоторые интегральные уравнения для многосвязной полуплоскости и кусочно-однородной плоскости. Прикладная механика, 5, № 3, 1969.
2. Метод сопряжения в теории плит. Изд-во БГУ, Минск, 1975.

Pykhtéev G.
Пыхтеев Г. Н.

1. О вычислении коэффициентов и оценке погрешности интерполирования квадратурными формулами для простейшего интеграла типа Коши и сингулярного интеграла по разомкнутому контуру. ЖВМ и МФ, 12, № 3, 1972.

Romanov V.
Романов В. Г.

1. Приближенное решение интегральных уравнений основных плоских статических задач теории упругости для области с углами. В сб. «Вычислительные системы», вып. 12, Новосибирск, 1964.
2. Численные методы решения интегральных уравнений теории упругости. Автореферат диссертации, 1964.

Sanikidze D.
Саникидзе Дж. Г.

1. К вопросу оценки погрешности квадратурных формул для некоторых сингулярных интегралов. Сообщ. АН Груз.ССР, 50, № 3, 1968.

Savine G.
Савин Г. Н.

1. Распределение напряжений около отверстий. «Наукова думка», 1968.

Savine G., Fleichman N.
Савин Г. Н., Флейшман Н. П.

1. Пластинки и оболочки с ребрами жесткости. «Наукова думка», 1964.

Savine G., Toultchi V.
Савин Г. Н., Тульчий В. И.

1. Пластинки, подкрепленные составными кольцами и упругими накладками. «Наукова думка», 1971.

Savrouk M.
Саврук М. П.

1. Напряжения в полосе с продольной трещиной. Физ.-хим. механика материалов, 5, № 4, 1969.
2. Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при симметричной нагрузке. Физ.-хим. механика материалов, 7, № 6, 1971.
3. Напряжения в пластине с бесконечным рядом параллельных трещин при антисимметричной нагрузке. Физ.-хим. механика материалов, 8, № 4, 1972.
4. Напряжения около трещины в упругой полуплоскости. Физ.-хим. механика материалов, 11, № 5, 1975.

Sherman D.
Шерман Д. И.

1. Некоторые случаи статической задачи теории упругости с осевой симметрией. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 1, 1935.
2. Статические плоские задачи теории упругости. Труды Тбилисского математического ин-та, 2, 1937.
3. Плоская задача теории упругости со смешанными краевыми условиями. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938.
4. О некоторых свойствах интегральных уравнений теории упругости. Труды Сейсмологического ин-та АН СССР, № 100, 1940.
5. Об одной задаче теории упругости. ДАН СССР, 27, № 9, 1940.
6. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях. ДАН СССР, 27, № 9, 1940.
7. К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных внешних силах. ДАН СССР, 28, № 1, 1940.
8. Некоторое замечание к задаче Дирихле. ДАН СССР, 29, № 4, 1940.
9. Плоская деформация в изотропной неоднородной среде. ПММ, 7, № 4, 1943.
10. Пространственная статическая задача теории упругости с заданными смещениями на границе. ПММ, 7, № 5, 1943.
11. Об одной смешанной задаче теории упругости. ПММ, 7, № 6, 1943.
12. Об одной задаче кручения. ДАН СССР, 63, № 5, 1948.
13. О напряженном состоянии некоторых запрессованных деталей. Изв. АН СССР, ОТН, № 9, 1948.
14. О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 15, № 3, 1951.

15. К вопросу о напряженном состоянии междукамерных целиков. Изв. АН СССР, ОТН, № 6-7, 1952.
16. Об изгибе круговой пластинки, частично защемленной и частично опертой по контуру. ДАН СССР, 101, № 4, 1955.
17. Об изгибе круговой пластинки, частично опертой и частично свободной по контуру. ДАН СССР, 105, № 6, 1955.
18. Об упругом равновесии пластинки, опертой на краю. Изв. Арм. ССР, Серия физ.-мат. наук, X, № 3, 1957.
19. О поперечном изгибе пластинки, опертой вдоль края, составленного из нескольких замкнутых кривых. ПММ, 239, № 1, 1959.
20. On the problem of plane strain in non-homogeneous media. Non-homogeneous in elasticity and plasticity. London-New York-Paris-Los Angeles, Pergamon Press, 1959.
21. Метод интегральных уравнений в плоских и пространственных задачах статической теории упругости. Труды Всесоюзн. съезда по теоретической и прикладной механике, 1960, Изд-во АН СССР. 1962.
22. Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой формы. Инженерный сборник, 31, 1961.
23. Весомая среда, ослабленная периодически расположенными отверстиями круговой и некруговой формы. Инженерный журнал, 1, № 1, 1961.
24. Решение задачи Дирихле для кругового кольца и его некоторые применения в теории потенциала и теории упругости. В сб. «Приложения теории функций в механике сплошной среды», т. I, «Наука», 1965.
25. К периодическим задачам Дирихле и плоской теории упругости, ч. I, II. Уч. зап. Азербайджанского ун-та. Серия физ.-мат., № 5, № 6, 1966.
26. По поводу одного особого интегрального уравнения и его применения в некоторых задачах теории упругости. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 22, № 3, 1969.
27. Об одном способе рассмотрения краевых задач теории функций и двумерных задач теории упругости. В сб. «Механика сплошной среды и родственные проблемы анализа», «Наука», 1972.

Sinioukov A., Volkov L., Lvov A., Chichkévitch A.
Синюков А. М., Волков Л. И., Львов А. И., Шишкевич А. М.

1. Баллистическая ракета на твердом топливе. Воениздат, 1972.

Sirounian V.
Сирунян В. Х.

1. Две задачи теории трещин в областях с круговыми границами. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 24, № 4, 1971.

Smirnov V.
Смирнов В. И.

1. Курс высшей математики, т. IV. Физматгиз, 1958.

Sobolev S.
Соболев С. Л.

1. Алгоритм Шварца в теории упругости. ДАН СССР, 4 (13), № 6, 1936.
2. Некоторые замечания о численном решении интегральных уравнений. Изв. АН СССР, Серия математическая, 20, № 4, 1956.
3. Уравнения математической физики. «Наука», 1966.

Soloviev Yu.
Соловьев Ю. И.

1. Решение пространственной осесимметричной задачи теории упругости для многосвязных тел вращения при помощи обобщенных аналитических функций. ДАН СССР, 169, № 2, 1966.

2. Некоторые вопросы, связанные с решением пространственной осесимметричной задачи теории упругости при помощи обобщенных аналитических функций. Труды Новосибирского ин-та инж. ж.-д. транспорта, вып. 62, 1967.
3. Решение осесимметричной задачи теории упругости при помощи обобщенных интегралов типа Коши. Труды Новосибирского ин-та инж. ж.-д. транспорта, вып. 62, 1967.
4. О приведении пространственных осесимметричных задач теории упругости к граничным задачам для аналитических функций комплексного переменного. ПММ, 35, № 5, 1971.
5. Действие сил, осесимметрично распределенных по плоским и цилиндрическим поверхностям, внутри упругого пространства и полупространства. Труды Новосибирского ин-та, ж.-д. транспорта, Механика деформируемого тела и расчет сооружений, вып. 137, 1972.

Soloviev Yu., Plechakov F.
Соловьев Ю. И., Плешаков Ф. Ф.
1. Осесимметричное напряженное состояние упругого полупространства с цилиндрической выемкой конечной глубины. Труды Новосибирского ин-та ж.-д. транспорта, Механика деформируемого тела и расчет сооружений, вып. 137, 1972.

Sretenski L.
Сретенский Л. Н.
1. Теория ньютоновского потенциала. Гостехиздат, 1946.

Stadnik M.
Стадник М. М.
1. О разрушении трехмерного хрупкого тела, ослабленного внутренней плоской трещиной. Прикладная механика, № 4, 1973.

Staerman I.
Штаерман И. Я.
1. Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1949.

Sternchis A.
Штерншис А. З.
1. Исследование напряженного состояния в упругом пространстве, ослабленном крестообразной полостью, методом потенциалов. Механика твердого деформируемого тела и родственные проблемы анализа. МИХМ, Москва, 1980.

Stoupak S.
Ступак С. Ф.
1. К решению интегральных уравнений пространственных задач теории упругости. Механика твердых деформируемых тел и родственные проблемы анализа. МИХМ, 1978.

Tchéméris V.
Чемерис В. С.
1. До питания про застосувания Р-аналітичних функцій в осесимметричній теорії пружності. Доповіді АН УРСР, № 7, 1960.
2. Одномірні интегральні ріняння осесимметричної теорії пружності. Вісник Київского ун-ту, Серия мат. та мех., вып. 2, № 3, 1960.
3. Про чисельний разв'язок задач осесимметричної теорії пружності. Доповіді АН УРСР, № 5, 1962.

4. К вопросу о численном решении первой основной задачи осесимметричной теории упругости. Вычислительная и прикладная математика, Межведомственный научный сборник, вып. 8, 1969.

Tchérépanov G.
Черепанов Г. П.

1. О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, № 1, 1962.
2. Механика хрупкого разрушения. «Наука», 1974.

Tchibrikova L.
Чибрикова Л. И.

1. О краевой задаче Римана для автоморфных функций. Уч. зап. Казанского ун-та, 116, № 4, 1956.

Téléguina N.
Телегина Н. А.

1. О второй основной задаче теории упругости при сосредоточенной нагрузке. Сб. трудов Московского инженерно-строительного ин-та, 100, 1972.

Tikhonov A., Arsénine V.
Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.

1. Методы решения некорректных задач. «Наука», 1974. (Tikhonov A., Arsénine V. Méthodes de résolution de problèmes mal posés. Editions Mir, 1976).

Tonoïan V., Melkoumian S.
Тоноян В. С., Мелкумян С. А.

1. Об одной задаче для полуплоскости с вертикальным конечным разрезом. Изв. АН Арм. ССР, Механика, 25, № 3, 1972.

Toropina V.
Торопина В. П.

1. Периодическая задача теории упругости при заданных на контуре области напряжениях. Труды Ленингр. технол. ин-та, вып. 23, 1952.

Tsandékov M.
Цандеков М. И.

1. Основные граничные задачи теории установившихся упругих колебаний для областей с угловыми особенностями. Труды Тбилисского ун-та, 56, 1955.

Ufland Ya.
Уфлянд Я. С.

1. Интегральные преобразования в теории упругости. «Наука», 1967.

Vaïnberg D., Siniavski A.
Вайнберг Д. В., Синявский А. П.

1. Расчет оболочек. Госстройиздат, Киев, 1961.

Vaïndiner A., Moskvitine V.
Вайндинер А. И., Москвитин В. В.

1. Сингулярные интегральные уравнения трехмерных задач теории упругости: регуляризация, кубатурные формулы, дифференциальные свойства и приближенные методы решения. ДАН СССР, 228, № 6, 1976.

Vékua I.
Векуа И. Н.

1. Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении. Сообщ. АН Груз. ССР, II, № 6, 1941.

Vékua N.
Векуа Н. П.

1. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи. Гостехиздат, 1950.

Vériouzhski Yu.
Верюжский Ю. В.

1. Об одном способе аппроксимации интегрального уравнения при решении методом потенциала некоторых задач теории упругости. В сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 24, 1974.
2. Численные методы потенциала в некоторых задачах прикладной механики. Киев: Вища школа, 1978, с. 293.

Vériouzhski Yu., Voussatiouk A., Savitski V.
Верюжский Ю. В., Вусатюк А. И., Савицкий В. В.

1. Численная реализация метода академика В. Д. Купрадзе при решении некоторых статических задач теории упругости. В сб. «Сопротивление материалов и теория сооружений», вып. 25, 1975.

Vigdergauz S.
Вигдергауз С. Б.

1. О плоской задаче теории упругости для многосвязных областей с циклической симметрией. ПММ, 38, № 5, 1974.
2. Замечание об относительной эффективности двух численных методов плоской теории упругости. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», 7, № 1, Новосибирск, 1976.

Vorovitch I.
Ворович И. И.

1. О поведении решений основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. В сб. «III Всесоюзн. съезд по теоретической и прикладной механике», Аннот. докл., М., 1968.

Vorovitch I., Alexandrov V., Babechko V.
Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А.

1. Неклассические смешанные задачи теории упругости. «Наука», 1974.

Vorovitch I., Kovaltchouk B.
Ворович И. И., Ковальчук Б. Е.

1. О базисных свойствах одной системы однородных решений. ПММ, 31, № 5, 1967.

Yaréma S.
Ярема С. Я.

1. О напряжениях около вершины трещины, приближающейся к поверхности тела. Физ.-хим. механика материалов, № 5, 1975.

Yaréma S., Savrouk M.
Ярема С. Я., Саврук М. П.

1. Напружений стан циліндричної оболочки з поздовжньою або поперечною тріщиною при симметричному навантаженні. Доповіді АН УРСР, А, № 8, 1967.

2. Антисимметричный напружений стан біля тріщины у пологій оболонці. Доповіді АН УРСР, А, № 8, 1969.
3. Пологая оболочка с трещиной. В сб. «Концентрация напряжений», вып. 3, «Наукова думка», 1971.
4. Напряжение в цилиндрической оболочке с произвольно ориентированной трещиной. Физ.-мат. механика материалов, 5, № 3, 1969.
5. Влияние кривизны на напряженное состояние оболочки с трещиной. Прикладная механика, 6, № 11, 1970.

Zabreïko P., Koshélev A., Krasnoselski M., Mikhline S., Rakovtchik L.. Stetsenko V.
Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.
1. Интегральные уравнения. «Наука», 1968.

Zapparov K., Perline P.
Заппаров К. И., Перлин П. И.
1. Численное решение плоской задачи теории упругости для области сложной конфигурации. Прикладная механика, № 5, 1976.

Zargarian S.
Заргарян С. С.
1. Плоская задача теории упругости для односвязных областей с угловыми точками при заданных на границе внешних силах. ДАН Арм. ССР, 60, № 1, 1975.
2. Плоская задача теории упругости для односвязных областей с угловыми точками при заданных на границе смещениях. ДАН Арм. ССР, 60, № 3, 1975.
3. Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости для односвязных областей с углами. ДАН Арм. ССР, 63, № 2, 1976.

Zargarian S., Enfiadjian R.
Заргарян С. С., Энфиаджян Р. Л.
1. Плоская задача теории упругости для круга с радиальным разрезом. ДАН Арм. ССР, 54, № 3, 1972.

Zhouravski A.
Журавский А. М.
1. Справочник по эллиптическим функциям. ОНТИ, 1941.

Zinoviev B.
Зиновьев Б. М.
1. Один приближенный метод расчета тел с разрезами. Труды Новосибирского ин-та ж.-д. транспорта, вып. 137, 1972.

Ziouzine V., Mossakovski V.
Зюзин В. А., Моссаковский В. И.
1. Осесимметричное нагружение пространства со сферическим разрезом. ПММ, 34, № 1, 1970.

## Auteurs étrangers

Ahlberg J. H., Nilson E. N., Walsh J. L.
1. The theory of splines and their applications, New York — London, Acad. Press, 1967.

Altiero N. J., Gavazza S. D.

1. An effective boundary-integral approach for the mixed boundary value problems of linear elastostatics. Appl. Math. Modell., v. 3, nº 2, 1979.

Antes Pf.

1. Spline-Functionen bei der Lösung von Integralgleichungen. Numer. Math., 19, 1972.
2. Über die Integralgleichungen von Massonet und Rieder. Z. angew. Math. und Mech., 53, nº 4, 1973.

Appl F. T., Koerner D. R.

1. Numerical analysis of plane elasticity problems. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 94, nº 3, 1968.
2. Stress concentration factors for V-shaped, hyperbolic and rounded V-shaped notches. Pap. Amer. Soc. Mech. Eng., DE-2, 1969.

Ashbaugh N. E.

1. On the openig of a finite crack normal to an interface. Trans. ASME, E40, nº 2, 1973.

Banerjee P. K.

1. Foundations within a finite elastic layer. Civ. Eng. and Public Works Rev. 66, nº 784, 1971.

Barone M. R., Robinson A. R.

1. Determination of elastic stresses at notches and corners by integral equations. Int. J. Solids and Struct., 8, nº 11, 1972.

Bazant Z. P.

1. Three-dimensional harmonic function near termination of gradient singularity lines: a general numerical method. Int. J. Eng. Sci., v. 12, nº 3, 1974.

Bazant Z. P., Keer L. N.

1. Singularities of elastic stress and of harmonic function at conical notches or inclusion. Int. J. of Solids and Structures, v. 10, nº 9, 1974.

Carleman T.

1. Über Neumann-Poincaresche Probleme fur ein Gebiet mit Ecken. Uppsala, 1916.

Cook T. S., Erdogan F.

1. Stress in bonded materials with a crack perpendicular to the interface. Int. J. Eng. Sci., 10, nº 8, 1972.

Cruse T. A.

1. Numerical solutions in three-dimensional elastostatics. Int. J. Solids and Struct., 5, nº 12, 1969.
2. Some classical elastic sphere problems solved numerically by integral equations. Trans. ASME, E39, nº 1, 1972.
3. Application of the boundary integral equation method to three-dimensional stress analysis. Comput. and Struct., 3, nº 3, 1973.
4. An improved boundary-integral equation method for three-dimensional elastic stress analysis. Comput. and Struct., 4, nº 4, 1974.

Cruse T. A., Rizzo F. J.

1. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. J. Math. Analysis Applic., 22, 1968.

Cruse T. A., Van Buren W.

1. Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack. Int. J. Fract. Mech., 7, nº 1, 1971.

Dmowska R., Kostrov B. V.

1. A shearing crack in a semi-space under plane strain conditions. Arch. mech. stosow., 25, nº 3, 1973.

Dubois M., Lachat J. C.

1. Equations intégrales. Application method variation calcul. struct. Journees, etud. 1972.

Ebert J.

1. Ein Beitrag zur Lösung ebener Randwertprobleme mit Hilfe von Funktionalgleichungen und der elektrischen Potentialanalogie. Schiffbauforschung, 11, nº 5-6, 1972.

Erdogan F.

1. Approximate solutions on systems of singular integral equation. SIAM J. Appl. Math. 17, nº 6, 1969.
2. Treatise on Continium Physics, edited by A. C. Eringen. N. Y., Academic Press, 1972.

Erdogan F., Gupta G. D.

1. Layered composites with an interface flaw. Int. J. Solids and Struct., 7, nº 8, 1971.

Erdogan F., Gupta G. D., Cook T. S.

1. Numerical solution of singular integral equations. In « Mechan. fracture I. Methods of analysis and solutions of crack problems ». Ed. G. C. Sih. Leyden Noordhoff Int. Publ. Co., 1973.

Fichera G.

1. Existence theorems in elasticity. Springer-Verlag. Berlin — Heidelberg, N. Y., 1972.

Folias E. S.

1. Stresses in a cracked spherical shell. J. Math. Phys., 44, nº 2, 1965.

Fredholm I.

1. Solution d'un problème fondamental de la théorie de l'élasticité. Arch. Mat. Astronom. Fysik, 2, 1905.

Furuhashi Rozo, Kataoka Masoharu

1. Theory of elastic potential of inhomogeneous material. Bull. ISME, 11, 48, 1968.

Giraud G.

1. Equations à intégrales principales. Ann. scient., Ecole Norm. Super., 51, nº 3, 1934.

Goursat E.

1. Cours d'analyse mathématique, t. III. Gauthier-Villars, 1927.

Hartranft R. J., Sih G. C.

1. The use of eigenfunctionen expansions in the general solution of three-dimensional crack problems. J. Math. and Mech., 19, nº 2, 1969.
2. Solwing edge and surface crack problems by an alternaiting method. In «Mechan. fracture I. Methods of analysis and solutions of crack problems ». Ed. G. C. Sih. Leyden, Noordhoff Int. Publ. Co., 1973.

Heise U.

1. The calculation of Cauchy principal values in integral equations for boundary value problems of the plane and three-dimensional theory of elasticity. J. Elast., 1975, 5, nº 2, 99-110.

Jackson D.

1. Fourier series and ortogonal polynomials. 1941, Wisconsin Press.

Jaswon M. A., Maiti M., Symm J. T.

1. Numerical biharmonic analysis and some applications. Int. J. Solids and Struct., 3, nº 3, 1967.

Karp S. N., Karal F. G. J.

1. The elastic field behavior in the neighborhood of cracw of arbitrary angles. Comm. on Pure and Applied Mathematics, v. XV, nº 4, 1962.
2. A second generation boundary integral program for three-dimensional elastic analysis. ASME, Appl. Mech. Conf., N. Y., 1975.

Kawai T., Fujitani Y.

1. Analysis of three-dimensional surface crack problems by boundary integral method. Seisan kenkyu, Mon. J. Inst. Ind. Sci. Univ. Tokyo, 28, nº 2, 1976.

Keer L. M., Parihar K. S.

1. Elastic stress singularity at conical inclusions. Int. J. Solids and Structures, v. 14, nº 4, 1978.

Kermandis T.

1. A numerical solution for axially symmetrical elasticity problems. Int. J. Solids and Struct., 11, nº 4, 1975.

Kinoshita N., Toshio M.

1. On boundary value problem of elasticity. Res. Repts Fac. Engng, Meiji Univ., nº 8, 1956.

Koiter W. T.

1. Approximate solution of Wiener — Hopf type integral equations with applications. I. General theory. II. A, B. Some plate bending problems and an example from hydrodynamics. Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., B57, nº 5, 1954.
2. Stress distribution in an infinite elastic sheet with doubly-periodic sets of equal holes. Boundary problems in differential equations. Madison. Univ. Wisconsin Press, 1960.

Lachat J. C., Watson J. O.

1. Effective numerical treatment of boundary-integral equations : a formulation for three-dimensional elastostatics. Int. J. for Numerical Methods in Engineering, 10, nº 9, 1976.

Lauricella G.

1. Alcune applicationi della teoria della equazioni funzionali alla fisica-matemat. Nuovo cimento, 13, ser. 5, 1907.
2. Sur l'intégration de l'équation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. Acta Mathem., 32, 1909.

Love A. E. H.

1. The Mathematical theory of Elasticity, Cambridge, 1927.

Massonet C. E.

1. Solution générale du problème aux tensions de l'élasticité tridimensionnelle. Actes IX Congr. internat. mécan. appl., t. 5, Bruxelles, Univ. Bruxelles, 1957.
2. Numerical use of integral procedures. Stress analysis, London — New York — Sydney, John Wiley and sons, Ltd., 1965.

Miche R.

1. Le calcul pratique de problèmes élastiques à deux dimensions par la méthode des équations intégrales. Proc. 2 Int. congr. appl. Mech., Zürich, 1926.

Mindlin R. D.

1. Force at a point in the interior of semi-infinite solid. Physics, 7, n° 5, 1936

Nisitani Hironobu, Murekami Yukitaka.

1. Stress intensity factors of semi-elliptical crack and elliptical crack. (Tension). Trans. Jap. Soc. Mech. Eng., 40, n° 329, 1974.

Noble B.

1. Methods based on the Wiener — Hopf technique for the solution of partial differential equation. London, 1958.

Nowacki W.

1. Teoria sprężystości. Warszawa, 1970.

Odqwist F. K.G..

1. Uber Randwertaufgaben die Hydrodinamik zaher Flussghkeiten. Math. Zeit. band 32, heft 3, 1930.

Oliveira Eduardo R. Arantes.

1. Plane stress analysis by a general integral method. J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 94, n° 1, 1968.

Parton V. Z., Perlin P. I.

1. Strength of Solids of complex Shape. Proceedings of the twelfth Inter. Symposium on Space Technology and Science. Tokyo, 1977.

Pham The Lai.

1. Potentiels élastiques ; tenseurs de Green et de Neumann. J. méc., 6, n° 2, 1967.

Radon J.

1. Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential. Sitzungsberichte d. Akad. d. Wiss. Wien, math. natur. Kl. Abt. II, 128, 1919.

Rieder G.

1. Mechanische Deutung und Klassifizierung einiger Intergralverfahren der ebenen Elastizitätstheorie. I, II. Bull. Acad. polon. sci. Sér. sci. techn., 16, nº 2, 1968.

Rizzo F. J.

1. An integral equation approach to boundary value problems of classical elastostatics. Quart. Appl. Math., 25, nº 1, 1967.

Rizzo F. J., Shippy D. J.

1. A formulation and solution procedure for the general non-homogeneous elastic inclusion problem. Int. J. Solids and Struct., 4, nº 12, 1968.

Sih G. C.

1. Stress distribution near internal crack-tips for longitudinal shear. Trans. ASME, E32, n° 1, 1965.
2. A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate. Int. J. Fracture Mech., 7, n° 1, 1971.

Sneddon I. N.

1. Fourier transforms. New York, McGraw-Hill, 1951.

Sneddon I. N., Berry D. S.

1. The classical Theory of Elasticity. Springer-Verlag. Berlin — Göttingen — Heindelberg, 1958.

Snyder M. D., Cruse T. A.

1. Boundary-integral equation analysis of cracked anisotropic plates. Int. J. Fracture, 11, nº 2, 1975.

Sommerfeld A.

1. Über ferzweigte potentiale im Raum. Proc. Lond. Mat. Soc., 28, 1897.

Stern M.

1. A boundary integral representation for stress intensity factors. Proc. 10th Anniv. Meeting Soc. of Eng. Sci. Raleigh. N. C. 5-7, Nov. 1973.

Stern M., Becker E. B., Dunham R. S.

1. A contour integral computation of mixed mode stress intensity factors. Int. J. of Fracture., v. 10, nº 3, 1976.

Stern M., Soni M. L.

1. On the computation of stress intensities at fixed free corners. Int. J. Solids and Struct., 12, n° 5, 1976.

Stroud A. H., Secres T. D.

1. Gaussian Quadrature Formulas. Prentice-Hall, N. Y., 1966.

Swedlow J. L., Cruse T. A.

1. Formulation of boundary integral equations for three-dimensional elasto-plastic flow. Int. J. Solids and Struct., 7, nº 12, 1971.

Szmodits K.

1. Solution of the first basic problem of the theory of elasticity with real potentials. Acta techn. Acad. Sci. hung., 68, nº 3-4, 1970.

Tricomi F. G.

1. Potential theory : the sources of many-dimensional singular integral equations. Applications de la théorie des fonctions à la mécanique des melieux continus, t. 2, «Naouka», Moscou, 1965.

Vogel S. M., Rizzo F. J.

1. An integral equation formulation of three-dimensional anisotropic elastostatic boundary value problems. J. Elasticity, 3, n° 3, 1973.

Wang F. D., Cruse T. A.

1. A comparaison of the finite element and integral method for three-dimensional mine structural analysis. Rept. Depart. Mech. Eng. Carnegie — Mellon Univ., 53, n° 4, 1973.

Weber C.

1. Achsensymmetrische Deformation von Umdrehungs Körpern. Z. angew. Math. und Mech., 5, n° 6, 1925.

Weyl H.

1. Das asymptotische Verteilingsgesetz der Eigenschwingungen eines beliebig gestalten elastischen Körpers. Rend. Circ. Mat. Palermo, 39, 1915.

Williams M. L.

1. Stress singularities resulting from various boundary conditions in angular corners of plates in extension. Trans. ASME, E19, 1952.
2. The stress around a fault or crack in dissimilar media. Bull. Seismol. Sos. Amer., 19, 1959.

Yang Wei Hguin.

1. On an integral equation solution for a plate with internal support. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 21, n° 4, 1968.

Zak A. R., Williams M. L.

1. Crack point stress singularities at a bimaterial interface. Trans. ASME, E30, n° 1, 1963.

Zaremba S.

1. Sur un problème mixte relatif à l'équation de Laplace. Bull. de l'Académie des sciences. Cracovie. Classe des sciences math. et natur., série A, 1910.

Zienkiewicz O. C., Cheung Y. K.

1. The finite elements method in structural and continuum mechanics, N.Y., McGraw-Hill, 1967.

# INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES